Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Вятский государственный университет»

В. С. Хорошавин, А. В. Зотов

ОСОБОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Киров
2019

УДК 681.513.5:621.3
ББК 32.965
Х82

Печатается по рекомендации Научного совета Вятского государственного университета

Рецензенты:

А. А. Красных, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой электротехники и электроники ФГБОУ ВО «Вятский государственный университет»;

В. И. Пономарев, доктор технических наук, профессор, директор АО НПП «Знак»

Хорошавин В. С. (с. 3–85, 105–155, 179–208), Зотов А. В. (с. 85–104, 155–178)

Хорошавин, В. С.

Х82 Особое оптимальное управление нелинейными объектами : [монография] / В. С. Хорошавин, А. В. Зотов. – Киров : Вятский государственный университет, 2019. – 208 с.

ISBN 978-5-98228-193-7

Изложены вопросы анализа и синтеза алгоритмов оптимального управления с помощью принципа максимума, условий общности положения для нелинейных объектов и качественной теории дифференциальных уравнений, приведены структуры систем особого оптимального управления реальными объектами.

Предназначена для студентов и специалистов, занимающихся изучением и исследованием проблем управления в технических системах.

УДК 681.513.5:621.3
ББК 32.965

ISBN 978-5-98228-193-7

© Вятский государственный университет (ВятГУ), 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 5
1. ОСОБЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ
1.1. СТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ 18
1.1.1. Особые управления в задаче быстродействия.....18
1.1.1.1. Существование оптимального управления и методы его нахождения.....18
1.1.1.2. Существование и вычисление особого управления.....20
1.1.1.3. УОП для нелинейных объектов.....21
1.1.2. Особые управления в задачах на минимум ресурсов 24
1.1.2.1. Постановки задач на минимум ресурсов 24
1.1.2.2. Задачи на минимум ресурсов координат 25
1.1.2.3. Задачи на минимум ресурсов линейного управления 30
1.1.2.4. Задачи на минимум импульса управления 32
1.1.3. Свойства особого управления.....36
1.1.3.1. Оптимальность особого управления 36
1.1.3.2. Качественная связь особых управлений и скользящих режимов.....39
1.1.3.3. Применение УОП для параметрической оптимизации 45
1.1.4. Задачи с нелинейным управлением.....51
1.1.4.1. Решение задачи с помощью УОП для нелинейных объектов 51
1.1.4.2. Исследование замкнутой системы
с многократно продифференцированным управлением 60
1.1.4.2.1. Анализ асимптотики оптимальных траекторий.....61
1.1.4.2.2. Моделирование замкнутой системы с МДУ.....70
1.1.4.3. Построение замкнутой системы при задании вида управления.....73
1.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ.....78
1.2.1. Постановка задачи.....78
1.2.2. УОП для нелинейных нестационарных объектов.....81
1.2.3. Бифуркационные свойства управления.....86
1.2.4. Управление экстремальными объектами с произвольным конечным состоянием ...99
1.2.4.1. Стационарные объекты.....99
1.2.4.2. Нестационарные объекты.....103
2. АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ОСОБОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИМИ УСТАНОВКАМИ
2.1. ПОЛЮСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА 105
2.1.1. Оптимальное по быстродействию управление 106
2.1.2. Совмещенная система с оптимальным по быстродействию управлением
и стабилизацией конечных координат 112
2.1.3. Квазиоптимальная система по критериям быстродействия и минимума
энергетических затрат.....120
2.2. УПРАВЛЕНИЕ ШАГОВЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ 123
2.2.1. Задача быстродействия.....125
2.2.2. Минимизация динамической погрешности по скорости 133

2.2.3. Минимизация динамической погрешности по положению 142
2.3. УПРАВЛЕНИЕ ОЗОНАТОРОМ 144
2.4. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УПРАВЛЯЮЩИЕ УСТРОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ 150
2.5. ПРОГРАММНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСОБОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ... 155
2.5.1. Алгоритм программы поиска особого управления в Maple 156
2.5.2. Листинг программы в Maple 163
2.5.3. Листинг программы вычисления особого управления в системе MATLAB 176
2.6. ОСОБОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ 179
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 186
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 188
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ 199
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 206

ВВЕДЕНИЕ

Для современной науки и техники характерна потребность в наиболее рациональном использовании ограниченных временных, материальных и энергетических ресурсов. Переход к оптимальному использованию оборудования, к рациональной организации технологических процессов повысит производительность труда, даст огромную экономию средств, улучшит экологическую ситуацию. Эти задачи для динамических объектов составили предмет теории оптимального и экстремального управления [3, 8, 9, 16, 35, 36, 50, 51, 54, 57, 61, 62, 67, 70, 82, 88, 91, 96, 120]. Существенный вклад в развитие теории и практики оптимальных и экстремальных систем внесли отечественные ученые А. А. Фельдбаум, Л. С. Понтрягин, Н. Н. Красовский, А. М. Летов, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, С. В. Емельянов, В. И. Зубов, А. А. Красовский, В. В. Казакевич, А. А. Колесников, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Моисеев, В. А. Олейников, Л. А. Растригин и другие, а также зарубежные ученые Н. Винер, Р. Белман, Р. Калман, М. Атанс, П. Фалб, Э. Ли, Ла-Салль и др.

Конечной целью расчета, аналитического или экспериментального исследования современных систем управления, включающих объект управления и управляющее устройство, является определение их оптимальной структуры и таких законов управления, которые обеспечивают наилучшие в определенном смысле показатели качества. В настоящее время регулярные алгоритмы оптимального управления существуют для линейных объектов, оптимизируемых по быстродействию, расходу топлива и квадратичному критерию качества [7, 8, 36, 51, 54, 62, 76, 91, 96, 99].

Однако во многих важных задачах оптимального управления приходится учитывать нелинейность объекта [3, 8, 18, 41, 44, 77, 91, 125] и, кроме того, во многих случаях требуется использовать неквадратичный критерий качества [54, 62, 133]. Нелинейные динамические объекты являются наиболее распространенным видом объектов автоматического и автоматизированного управления, так как реальные объекты управления описываются, как правило, нелинейными дифференциальными уравнениями [56, 57, 70, 73]. Кроме того, при оптимальном управлении предусматривается движение в большом, поэтому нельзя применить линеаризацию уравнений, что значительно усложняет решение задачи. Для нелинейных объектов наиболее разработаны задачи терминального управления в работах Р. Габасова и

Ф. М. Кирилловой [21, 22], а также задачи быстродействия и на минимум ресурсов в работах В. А. Олейникова [70–75] и его учеников [10, 11, 17, 26, 28–32, 43, 68, 87, 89, 100–109, 115].

Предметом исследования являются нелинейные динамические объекты, закон движения которых задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = f(x, U, t), \qquad t \in [0, T], \tag{B-1}$$

где векторы координат x и управлений U принадлежат ограниченным замкнутым множествам $x \in \Omega_x \subset R_n$, $U \in \Omega \subset R_m$. Относительно уравнения (B-1) предполагается, что оно удовлетворяет известным [37, 56, 57] теоремам существования и единственности решений, теоремам о непрерывной зависимости решений от граничных условий и параметров, причем правые части системы (B-1) непрерывны и дифференцируемы по переменным системы.

Граничные условия для (B-1) задаются на множестве S стационарных состояний [8,91] объекта

$$S = \{x(0), x(T): \dot{x} = f(x, 0, t) = 0\}$$

или в малой его окрестности.

Задача оптимального управления заключается в том, что требуется найти допустимое управление $U \in \Omega$, переводящее объект (B-1) из начального состояния $x(0) \in S$ в конечное $x(T) \in S$, минимизирующее при этом критерий оптимальности, заданный в виде интегрального функционала

$$I = \int_0^T f_0(x, U, t)\, dt, \tag{B-2}$$

где T – время перехода, может быть фиксированным или нефиксированным; функция $f_0(x, U, t)$, как правило, непрерывна и дифференцируема по x.

Используемые при исследовании оптимальных управлений классическое вариационное исчисление [1, 78, 79, 91, 119] и принцип максимума [3, 8, 9, 16, 21, 22, 110, 113, 114] трудно применимы в ин-

женерной практике из-за низкой конструктивности результатов, так как, во-первых, получаемое с их помощью управление записывается в лучшем случае в функции времени, тогда как для синтеза управления необходимо иметь его зависимость от координат и параметров объекта, во-вторых, управляющему устройству необходимо выполнять сложные вычислительные процедуры.

Общей методики для решения нелинейных оптимальных задач не существует ввиду их большого разнообразия в зависимости от вида правых частей системы дифференциальных уравнений (В-1) различных объектов: стационарных, нестационарных, с запаздыванием, нелинейных по координатам и управлениям, их структуры и критерия оптимальности (В-2). Из-за этих факторов для исследования оптимального управления целесообразно использовать методику, позволяющую определять и прогнозировать общие и частные результаты в зависимости от особенностей объекта управления и критерия оптимальности.

В математических и технических приложениях весьма общая форма математического описания закона движения объекта (В-1) конкретизируется [56, 57, 64, 73, 75], при этом в основном используются различные в зависимости от вхождения координат, управлений и времени, а также изменения параметров объекта от времени векторно-матричные формы записи систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее широко распространена векторно-матричная модель линейного стационарного объекта в пространстве состояний (во временной области) [8, 36], заданная в виде системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax + BU, \qquad \text{(В-3)}$$

которая, как правило, характеризует линеаризованное движение объекта управления в малой окрестности некоторой стационарной точки. О представлении динамики объекта в пространстве состояний см. Приложение 1 данной работы, краткие необходимые сведения по теории матриц изложены в приложении в книге [91]. Оптимальное управление объектами, имеющими описание (В-3), исследовано наиболее полно как с теоретической точки зрения, так и в части практических приложений [3, 7, 8, 38, 50, 51, 54, 62, 77, 99].

Однако при оптимальном управлении движение объекта часто распространяется на большие области пространства состояний, и по-

этому нельзя линеаризовать уравнения движения. Приходится представлять объект управления в виде модели, в общем случае нелинейной по состояниям x и управлениям U

$$\dot{x} = A(x) + B(x, U). \qquad \text{(B-4)}$$

Большинство же реальных объектов в электротехнике, энергетике, химии, металлургии, горном деле, обогащении и т. д. можно описать в виде системы дифференциальных уравнений [56, 57, 73, 75], нелинейных по координатам x, но линейных по управлениям U (квазилинейные объекты):

$$\dot{x} = A(x) + B(x)U, \qquad \text{(B-5)}$$

где $A(x)$ – матрица-столбец с элементами $f_1(x_1, x_2, \dots x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \dots x_n)$, …, $f_n(x_1, x_2, \dots x_n)$;

$B(x)$ – матрица размером $(n \times m)$ с элементами $\varphi_{ij}(x_1, x_2, \dots x_n)$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$;

U – вектор с компонентами $U_1, U_2, \dots U_m$, причем $U \in \Omega \in R_m$.

Уравнение (B-5) линейно по вектору управлений U, и это обстоятельство значительно упрощает в дальнейшем решение задач оптимального управления. Уравнения движения нелинейного объекта с нелинейным управлением (B-4), как будет показано, могут быть приведены к виду (B-5) с линейным управлением путем линеаризации «в большом» [88, 102].

В нестационарном случае в модели объекта (B-4) учитывается зависимость правых частей от времени [64]:

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, U, t) \qquad \text{(B-6)}$$

или, для случая линейного управления,

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)U, \qquad \text{(B-7)}$$

где $A(x, t)$ – матрица-столбец с элементами $f_1(x_1, x_2, \dots x_n, t)$, $f_2(x_1, x_2, \dots x_n, t)$, …, $f_n(x_1, x_2, \dots x_n, t)$; $B(x, t)$ – матрица размером $(n \times m)$ с элементами $\varphi_{ij}(x_1, x_2, \dots x_n, t)$,$i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$; $B(x, U, t)$ – матрица-столбец с элементами $\varphi_{ij}(x_1, x_2, \dots x_n, U_1, U_2, \dots U_m, t)$,

$i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$; U – вектор с компонентами $U_1, U_2, \dots U_m$, причем $U \in \Omega \in R_m$.

Известно [75], что математическое описание динамических режимов базируется на уравнениях материального и энергетического баланса или на уравнениях равновесия сил, моментов, напряжений, токов и т. д. Несоответствие поступления объекту энергии или вещества с их расходом и вызывает переходные режимы. Нелинейность функций, входящих в математическое описание, определяется несколькими факторами: геометрией и свойствами материалов машины или аппарата; нелинейностью того физического или химического закона, который положен в основу технологического процесса; зависимостью коэффициентов функций от параметров процесса. Учет всех этих факторов и приводит к сложным нелинейным дифференциальным уравнениям даже для относительно простых по конструкции объектов. Часто из перечисленных выше факторов учитывают только те, которые играют определяющую роль. Однако при оптимальном управлении ни одним из факторов пренебречь нельзя, так как движение системы рассматривается в большом.

Геометрия машин и аппаратов, а также тот физический или химический закон, описывающий протекание процесса, известны, и формально получение математической модели не вызывает затруднений. Однако точное определение коэффициентов затруднительно, и в большинстве случаев для этой цели приходится ставить сложные и дорогостоящие эксперименты. Этот фактор также очень усложняет построение достоверной математической модели, необходимой для получения конкретных числовых данных, особенно важных для инженерной практики.

В практических приложениях конкретизируется и вид интегрального критерия оптимальности (В-2) [1, 3, 8, 26, 40, 41, 44, 49, 53, 59, 75, 88, 121, 126, 131, 134], основными при этом являются следующие задачи:

– на минимум времени перехода из начального $x(0)$ состояния в конечное $x(T)$ (задача быстродействия)

$$I = \int_0^T 1\,dt = T \to min; \qquad \text{(В-8)}$$

– на минимум расхода или отклонений координат (задача на минимум ресурсов)

$$I = \int_0^T f_0(x)\,dt \to min; \qquad \text{(B-9)}$$

и/или линейного управления с критериями, учитывающими знакопостоянное управление или импульс управляющего воздействия (задачи на минимум ресурсов)

$$I = \int_0^T f_0(U)\,dt \to min; \qquad \text{(B-10)}$$

$$I = \int_0^T f_0(|U|)\,dt \to min; \qquad \text{(B-11)}$$

– на минимум отклонений координат и нелинейного управления, чаще всего характеризующую энергию управляющего воздействия с квадратичным по управлению критерием (задача аналитического конструирования систем управления)

$$I = \int_0^T (f_0(x) + \alpha U^2)\,dt \to min, \alpha > 0; \qquad \text{(B-12)}$$

которая при времени перехода T, стремящегося к бесконечности, и требовании минимума критерия I, что может быть обеспечено только асимптотически устойчивой системой, называется задачей стабилизации или аналитического конструирования регуляторов;

– на минимум отклонений текущей траектории от заданной в функции времени программной (желаемой) траектории (задача программного движения)

$$I = \int_0^T f_0\big(x_{\text{зад}}(t) - x(t)\big)\,dt \to min. \qquad \text{(B-13)}$$

Критерии оптимальности I называют еще уравнениями цели или целевыми функциями, а уравнения движения объекта – уравнениями связи или уравнениями ограничений, причем ограничений в форме равенств.

Основное внимание в работе уделяется решению задач на минимум ресурсов, аналитического конструирования систем управления, программного движения и, конечно, задач быстродействия, так как свойства оптимального по быстродействию управления являются характерными для объекта и сохраняются при других критериях оптимальности.

В качестве основного метода исследования оптимального управления в данной работе используется принцип максимума Понтрягина [61], учитывающий ограничения на переменные системы и позволяющий отыскать управление в классе кусочно-непрерывных функций и потому более применимый для решения практических задач. Однако ряд скрытых и, что характерно, часто повторяемых особенностей нелинейных объектов с линейным управлением приводит к тому, что нормальная оптимальная задача становится особой или вырожденной, скользящей – такие термины используются в отечественной литературе [9, 11, 16, 17, 20–22, 24, 26, 29, 34, 43, 51, 71, 77, 85, 87, 89, 102, 110, 115, 118], или сингулярной, специфической – в зарубежной литературе [8, 39, 47, 121–126, 128, 129, 132–134], для которой принцип максимума не устанавливает однозначной связи между оптимальным управлением и вспомогательными переменными, вводимыми принципом максимума. Недостатком большинства существующих способов вычисления особого (вырожденного, сингулярного, специфического) в смысле принципа максимума управления является то, что они оперируют со вспомогательными переменными, найти решение для которых в замкнутой форме трудно. В работе для определения существования особого режима и вычисления особого управления в явном виде от координат и параметров нелинейного объекта, что необходимо на практике для синтеза замкнутой системы с обратной связью, используется аппарат условий общности положения (УОП) для нелинейных объектов [10, 11, 17, 26, 28–32, 43, 68, 70–75, 87, 89, 100–109, 115].

Для определения областей оптимальности особого управления используются модифицированные в [29, 102] известные необходимые условия оптимальности высокого порядка [20–22, 34, 39, 47, 85], которые представляют области оптимальности особого управления в

функции координат и параметров нелинейного объекта, а не в функции вспомогательных переменных.

Важной проблемой при исследовании и реализации управления является оценка бифуркационных свойств оптимальных траекторий с учетом изменения параметров и граничных условий объекта, а также времени, так как модель объекта (В-1) является приближенной и следует оценить чувствительность траекторий к действующим на объект возмущениям [17, 29, 43, 62, 72, 73, 75, 102, 104]. Для исследования топологии траекторий применены методы и приемы качественной теории дифференциальных уравнений [4, 5, 12, 116], краткие сведения из которой об определении характера особых точек приведены в Приложении 2.

Как известно [35, 70, 75, 82, 88, 120], существует большой класс нелинейных динамических объектов с экстремальной статической характеристикой, для которых имеется адекватное математическое описание. Применение для синтеза беспоисковых систем экстремального управления вариационных и градиентных методов [28, 82, 91] сопряжено со значительными вычислительными трудностями и приводит к сложной реализации управляющего устройства. С целью уменьшения временных и материальных затрат и вычислительных трудностей в [104, 137, 138, 140, 144] предлагается перейти от задачи экстремального управления к задаче динамической оптимизации на минимум отклонений координат объекта. При таком переходе необходимо рассмотреть проблемы выбора критерия с учетом известной аналитической или неаналитической статической характеристики и устойчивости точки экстремума, разработать структуры экстремальных регуляторов при измеряемых и неизмеряемых выходных координатах объекта, исследовать бифуркационные свойства экстремального управления с учетом дрейфа характеристик и инерционности объекта при различном явном вхождении функции времени, характеризующих возмущающие воздействия на объект.

В исследовании особых режимов сложность аналитических вычислений и их объём приводят к необходимости использования специализированного программного обеспечения, в данном случае – пакетов компьютерной математики и символьных вычислений. Для анализа особых ситуаций и поиска оптимальных управлений удобно использовать математические пакеты программ – системы компьютерной алгебры: Mathcad, MATLAB, Mathematica, Maple [2, 27, 60, 63, 112, 117, 127, 130]. Каждый из пакетов обладает достоинствами и не-

достатками. Здесь использованы система Maple как обладающая самыми развитыми средствами символьных вычислений и решения дифференциальных уравнений, и система MATLAB для блочно-структурного моделирования и расчёта систем управления.

Авторы многих работ, например [19, 45, 75, 80, 88], отмечают, что тормозом для широкого распространения сложных систем автоматизации, к которым относятся системы оптимального и экстремального управления, является отсутствие технических средств для их реализации. Только с появлением больших интегральных схем, выполняющих функции процессорных и запоминающих устройств, имеющих малые габариты, потребляемую мощность и стоимость, высокую производительность обработки информации, стало возможным применять сложные алгоритмы управления в широких масштабах для управления отдельными процессами и установками. При реализации оптимальных замкнутых систем управления нелинейными объектами необходимо учитывать функциональные и структурные особенности объектов, так как структура управляющего устройства зависит от совокупности граничных условий и особых траекторий, от функциональных связей управлений, особых и конечных траекторий с параметрами и координатами объекта, а указанные факторы определяются структурой объекта, видом уравнений движения объекта и критерия оптимальности.

На наш взгляд, справедливо утверждение авторов [97], что в последнее двадцатилетие «совершенствование автоматических систем базировалось на развитии технических средств автоматики, основанном на достижениях в области электроники, приборостроения, вычислительной техники и мехатроники, а теоретическая база систем автоматического управления слабо развивалась», из которого следует актуальность и важность развития и применения оптимального, включая особое, управления в решении проблем создания эффективных систем управления процессами и установками. Основное внимание в работе уделено разработке алгоритма особого оптимального управления, а его реализация доведена до структуры управляющего устройства как набора функциональных элементов и связей между ними, которая может быть детализирована аппаратным или программным путем с использованием технических средств автоматизации и управления.

Целью работы является систематизация и разработка прикладных, конструктивных в инженерной практике методов исследования

качественных свойств оптимальных управлений и построения структур управляющих устройств нелинейными динамическими объектами.

Подтвердить эффективность предлагаемых методов исследования, представив точные результаты в аналитической и графической формах и объяснив их физически, для нелинейных объектов возможно при размерности координат объекта не выше трех; исходя из полученных результатов качественного и количественного исследования низкоразмерных задач, можно прогнозировать поведение произвольных систем, но для нелинейных объектов, в отличие от линейных, не справедливы принципы аддитивности и однородности и потому распространение результатов на общие случаи неоправданно. Необходимо в каждом конкретном случае с помощью предложенных способов, конструктивность которых апробирована и обобщена для некоторых классов объектов второго и третьего порядков, отличающихся структурными и функциональными особенностями, исследовать поставленную задачу, в которой возможно получение новых, неизвестных ранее результатов.

В силу изложенного для достижения цели работы необходимо решить следующие задачи:

1. Систематизация и разработка прикладных способов качественного исследования оптимального и экстремального управления нелинейными стационарными и нестационарными объектами, учитывающих функциональные и структурные особенности их построения, определяющих особое управление и его оптимальность, топологические структуры и бифуркационные свойства траекторий в пространстве параметров и состояний объекта.

2. Выявление общих свойств управления и структур нелинейных оптимальных систем в задачах минимизации временных, материальных и энергетических затрат для различных классов нелинейных объектов.

3. Применение современных инструментальных средств аналитического конструирования, структурного синтеза, символьных вычислений, программно-аппаратных комплексов для исследования и проектирования систем оптимального управления техническими объектами.

4. Применение разработанных способов, алгоритмов и структур для исследования и построения систем оптимального и экстремального управления реальными объектами.

Теоретические результаты направлены на обобщение и развитие методов качественного исследования оптимального, включая особое,

управления нелинейными динамическими объектами и заключаются в разработке единого подхода как совокупности принципа максимума, условий вычисления и оптимальности особого управления и анализа характера особых оптимальных траекторий. При теоретических исследованиях используются методы теории автоматического управления, линейной алгебры, теория оптимальных процессов, теория дифференциальных уравнений, в том числе методы качественного анализа (определения топологической структуры траекторий, теория бифуркаций динамических систем, метод малого параметра), аппарат булевых функций, теория конечных автоматов.

Научную новизну монографии характеризуют:

1. Методика качественного исследования оптимальных управлений, отличающаяся применением функционально-структурного подхода к задачам на минимум ресурсов, позволяющая систематизировать и прогнозировать свойства управлений при различных типах нелинейностей, критериев и структур объекта, определить общие свойства управлений, сохраняющиеся для различных критериев, повторяющихся в классах объектов и заключающихся в общности топологий траекторий и управляющих воздействий в подпространствах топологии,

2. Аппарат УОП для нелинейных объектов, распространенный на новые классы объектов и задач управления, учитывающий критерий оптимальности, нестационарность задачи и ее нелинейность по управлению, позволяющий вычислить особое управление в явном виде от состояний объекта, определить предельные траектории для скользящего режима, качественно оценить оптимальное управление в части влияния параметров, единственности решения, корректности постановки задачи, вычислить оптимальное управление в задачах с нелинейным управлением через особое, которое может быть использовано для синтеза замкнутой системы непосредственно или путем задания уравнения регулятора.

3. Топологические структуры и бифуркационные свойства оптимальных траекторий в задачах на минимум ресурсов в зависимости от особенностей объекта и критерия оптимальности, определенные с помощью методов нахождения характера особых точек, топологии, бифуркаций, метода малого параметра и метода нахождения хода сепаратрис и состояний равновесия из анализа особого управления, позволяющего установить, что бифуркационные свойства оптимального управления определяются особыми решениями уравнений объекта, для нестационарных объектов бифуркации траекторий могут зависеть

от времени, в задачах с нелинейным управлением устойчивые медленные движения возникают, если для нелинейного объекта существует особая траектория в задаче быстродействия под особым управлением задач быстродействия или на минимум ресурсов, на основе которых и построения системы сравнения или введения добавки к особому управлению разработаны способы построения асимптотически устойчивых замкнутых систем.

4. Алгоритмы и структуры управляющих устройств в замкнутых системах, отличающиеся тем, что с целью повышения гибкости алгоритма, совмещения различных критериев оптимальности, синтез управляющего устройства проводится программными средствами символьных и численных вычислений, что позволяет реализовать оптимальное управление как в функции времени, так и в виде функции координат и параметров объекта управления.

5. Метод построения беспоисковых экстремальных систем, отличающийся нахождением экстремального управления как особого, позволяющий построить замкнутую систему с регулированием по отклонению с асимптотически устойчивым положением равновесия в точке экстремума статической характеристики, знак обратной связи в системе зависит от соотношения инерционностей звеньев объекта.

Практические результаты работы связаны с применением разработанных способов исследования, алгоритмов управления и структур управляющих устройств для построения систем оптимального и экстремального управления техническими объектами. Разработанную методику можно считать инженерной, если она позволяет конструктивно провести исследование управления в удобном для практического использования виде – в пространстве параметров и состояний нелинейного объекта на основе операций дифференцирования и решения уравнений аналитическими и/или программными средствами. Конкретно практическая ценность работы заключается в разработке:

1) алгоритмов и структур управляющих устройств для нелинейных объектов с реализацией релейных, непрерывных особых управлений, скользящих режимов и управлений стабилизации с учетом выявленных общих свойств оптимального управления в задачах минимизации временных, материальных и энергетических ресурсов;

2) алгоритмов и структур совмещенных систем оптимального перехода и стабилизации объекта в заданном состоянии, использующих общность особого управления при различных критериях, причем использование только особого управления позволяет построить субоптимальную систему;

3) методики оценки чувствительности оптимальных решений к изменениям параметров, времени и начальных условий, позволяющей оценить грубость системы и обеспечить устойчивость замкнутой системы управления;

4) методики определения существования особого режима, вычисления особого управления и области его оптимальности, проведения анализа топологической структуры и бифуркационных свойств траекторий программными средствами символьных и численных вычислений;

5) применения современных инструментальных средств аналитического конструирования, структурного синтеза, символьных вычислений, программно-аппаратных комплексов для исследования и проектирования систем оптимального управления техническими объектами.

Рассмотрены примеры оптимального управления реальными электромеханическими и электротехническими установками: электроприводом постоянного тока, шаговым электроприводом, установкой по электросинтезу озона, интегрирующим электроприводом, которые представляют самостоятельный интерес. Для практических примеров разработаны оптимальные алгоритмы управления и структуры регуляторов для их аппаратной и/или программной реализации.

1. ОСОБЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

1.1. СТАЦИОНАРНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ

1.1.1. Особые управления в задаче быстродействия

1.1.1.1. Существование оптимального управления и методы его нахождения

Для технических систем проблема существования допустимого управления, удовлетворяющего граничным условиям, как правило, не поднимается [16, 73]. Вторая проблема, которая возникает при определении существования оптимального управления, – проблема существования в классе допустимых управлений оптимального. Решению этой проблемы посвящены работы [9, 56, 57, 77]. Для большинства объектов, рассматриваемых в данной работе, условия теоремы существования оптимального управления выполняются. Исключение составляют объекты, обладающие бифуркационными свойствами оптимального управления, в которых выделяются области достижимости множества стационарных состояний, а также объекты, для которых минимум функционала находится при скользящем оптимальном режиме.

В случае отсутствия ограничений на переменные объекта (В-1) и не заданного заранее времени перехода T задача о минимуме интегрального функционала (В-2) для системы дифференциальных уравнений (В-1) традиционно называется задачей Лагранжа [67], которая решается методами классического вариационного исчисления [1, 78, 79, 91, 119].

Задачи с ограничениями на управление и фазовые переменные наиболее адекватны вариационным задачам, возникающим в технических приложениях. На фазовые координаты промышленных объектов могут накладываться различные ограничения: безусловные, определяемые конструкцией объекта; обусловленные ограниченностью управления; а также условные, отражающие специфику работы объекта [70, 75]. Классические методы вариационного исчисления, развитые для решения задачи Лагранжа, оказываются в общем случае неприменимыми при наличии ограничений на переменные системы, хотя иногда позволяют их учесть [1, 76, 79].

Для решения оптимальных задач с ограничениями на координаты и управления и отыскания оптимального управления в классе кусочно-непрерывных функций в конце 50-х годов академиком Л. С. Понтряги-

ным и его учениками был создан метод, названный принципом максимума [61], дающий для нелинейных объектов необходимые условия оптимальности управления.

Используя принцип максимума для решения общей задачи (В-1, В-2), записываем функцию Гамильтона H и систему для вспомогательных переменных Ψ при $\Psi_0 = -1$

$$H = -f_0(x, U) + \big(\Psi, f(x, U)\big),$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial f_0(x, U)}{\partial x} - \left(\frac{\partial f(x, U)}{\partial x}\right)\Psi.$$

Нахождение оптимального управления, при котором гамильтониан должен быть максимален, а вектор Ψ нетривиален, из приведенных выше нелинейных уравнений для общей задачи затруднительно.

Интерес представляет исследование оптимального управления для нелинейных по координатам объектов с линейным управлением при математическом описании вида (В-5) в задачах быстродействия и на минимум ресурсов. С одной стороны, решение задачи в этом случае значительно упростится. Например, для объекта (В-5) в задаче быстродействия с критерием (В-8) гамильтониан и вспомогательная система имеют вид

$$H = -1 + \big(\Psi, A(x)\big) + (\Psi, B(x)U) \tag{1-1}$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)^T \Psi. \tag{1-2}$$

Максимум гамильтониана H по управлению U определяется только линейным по U слагаемым $(\Psi, B(x)U)$, тогда, согласно теореме Вейерштрасса [74] о том, что монотонная функция и ее частный случай – линейная функция – достигает минимума или максимума лишь на границах области определения, получим, что оптимальным будет управление, которое принадлежит вершинам, граням или ребрам многогранника Ω ограничений по U. Если максимум гамильтониана достигается в вершинах многогранника Ω, то оптимальное управление должно отыскиваться в классе кусочно-постоянных функций

$$U(t) = \operatorname{sign}\big(\Psi, B(x)\big). \tag{1-3}$$

С другой стороны, последнее выражение однозначно определяет оптимальное управление при ненулевом вспомогательном векторе Ψ. В противном случае, как при применении классического вариационного исчисления в задачах с линейным управлением, имеет место вырожденное решение, когда некоторые из множителей Лагранжа тождественно равны нулю, так и в смысле применения принципа максимума возникает особый (вырожденный, скользящий, сингулярный, специфический) [8, 22, 24, 52, 84] режим, когда оптимальное управление не определяется однозначно через вектор Ψ.

1.1.1.2. Существование и вычисление особого управления

Первая проблема, которая возникает при исследовании особых ситуаций, – определение существования и вычисление особого управления. Это сложная, не решенная до конца задача [24, 85, 111]. В применяемых для ее решения способах можно выделить три направления:

1) поиск особого управления исходя из его определения путем многократного применения и логической интерпретации необходимых условий, вводимых принципом максимума [8, 16, 77, 84, 110, 113, 124–126, 133];

2) исследование особых режимов с помощью аппарата скобок Пуассона, что было предложено А. М. Летовым [54] и далее развито в работах [22, 118];

3) вычисление особого управления в явном виде от переменных и параметров объекта с помощью условий общности положения (УОП) для нелинейных стационарных объектов, разработанных В. А. Олейниковым и его учениками [17, 71, 73, 75, 87, 102].

Общим для первых двух направлений является необходимость исследования вспомогательных переменных Ψ при поиске особого управления. Техника вычисления особого управления после введения А. М. Летовым скобок Пуассона достигла такого уровня, который позволяет качественно записать особые управления в явном виде от параметров задачи. В получаемые уравнения входят вспомогательные переменные, которые необходимо исключать, что делается относительно просто для терминальной задачи с фиксированным временем. Однако с повышением порядка и усложнением задачи, особенно в нелинейном случае, исключение вспомогательных переменных практически невыполнимо из-за неразрешенности в замкнутом виде двухточечной граничной задачи, к которой принцип максимума сводит вариационную задачу.

1.1.1.3. УОП для нелинейных объектов

Для вычисления в нелинейной задаче быстродействия особых траекторий и управлений, обеспечивающих движение по ним, в работах В. А. Олейникова и его учеников предложен аппарат УОП для нелинейных стационарных объектов, который позволяет, не прибегая к анализу вспомогательных переменных, качественно определять особые траектории и особые управления в явном виде от координат и параметров нелинейного объекта.

Рассмотрим УОП для нелинейных стационарных объектов и технику их применения для задач быстродействия, так как на их основе вводятся условия для определения существования и вычисления особого управления в задачах на минимум ресурсов. Кроме того, эти УОП часто используются в данной работе для выявления свойств оптимального по быстродействию управления, которые сохраняются и при других критериях оптимальности, потому являются общими и необходимы для исследования реализаций оптимального управления.

Сначала сформулируем УОП для линейных объектов (В-3) в задаче быстродействия, введенные основоположниками принципа максимума [61]: если ω – вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника ограничений по управлению Ω, то вектор $B\omega$ не принадлежит никакому собственному инвариантному подпространству относительно преобразования A, т. е. векторы

$$B\omega, \quad AB\omega, \quad A^{n-1}B\omega$$

линейно независимы в пространстве R_n. Тогда, согласно теореме 9 Л. С. Понтрягина [61], каждое оптимальное управление должно быть кусочно-постоянной функцией времени со значениями в вершинах многогранника Ω. По аналогии с линейным случаем для вывода УОП в нелинейной задаче быстродействия (В-5, В-8) проводится следующее рассуждение [75].

Пусть максимум функции H (1-1) достигается на грани или ребре многогранника Ω, тогда получим

$$(\Psi, B(x)\omega) \equiv 0, \tag{1-4}$$

где ω – вектор, параллельный некоторой грани или ребру Ω.

Дифференцируем скалярное произведение (1-4) по времени:

$$\frac{d\big(\Psi(t), B\big(x(t)\big)\omega\big)}{dt} = \left(\frac{d\Psi(t)}{dt}, B\big(x(t)\big)\omega\right) +$$
$$+\left(\Psi(t), \frac{\partial B\big(x(t)\big)\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right) = 0.$$

Так как ω – постоянный вектор, то $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Представим производную от скалярного произведения (1-4) на траекториях систем (В-5) и (1-2)

$$\left(-\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)}{\partial x}U\right)^T \Psi, B(x)\omega\right) +$$
$$+\left(\Psi, \frac{\partial B(x)}{\partial x}\omega(A(x) + B(x)U)\right) = 0.$$

Преобразовав данное выражение, получим

$$\left(\Psi, \left[\frac{\partial B(x)}{\partial x}(A(x) + B(x)U) - \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)}{\partial x}U\right)B(x)\right]\omega\right) = 0.$$

Обозначив выражение в квадратных скобках через $B_2(x, U)$, получим

$$(\Psi, B_2(x, U)\omega) = 0.$$

Продифференцировав скалярное произведение (1-4) $(n-1)$ раз по времени, запишем следующую систему:

$$\left.\begin{array}{c}(\Psi, B_1(x)\omega) = 0,\\ (\Psi, B_2(x, U)\omega) = 0,\\ \vdots \\ (\Psi, B_n(x, U)\omega) = 0\end{array}\right\},$$

где векторы B_j, $j = 2, 3, \dots, n$ определяются из рекуррентного соотношения

$$B_j(x,U) = \frac{\partial B_{j-1}(x,U)}{\partial x}(A(x) + B(x)U) - \\ -\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)B_{j-1}(x,U), \tag{1-5}$$

а вектор $B_1(x) = B(x)$.

Векторы B_1, B_2, …, B_n образуют некоторый базис в R_n, если они линейно независимы. Тогда по аналогии с линейным случаем проекции Ψ на этот базис равны нулю, т. е. вектор Ψ тривиален. Это противоречит утверждению принципа максимума. Значит, если векторы B_1, B_2, …, B_n линейно независимы, то по принципу максимума управление определяется однозначно по соотношению (1-3), при этом управление кусочно-постоянно и его значениями являются лишь вершины многогранника Ω.

Составим матрицу

$$D_n = (B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n). \tag{1-6}$$

По аналогии с линейным случаем матрица D_n названа УОП для нелинейных объектов вида (В-5). Отметим, что если $A(x) = Ax$, $B(x) = B$, то из соотношения (1-5) следует

$$B_j = (-1)^{j-1}A^{j-1}B.$$

Это означает, что УОП для линейного объекта (В-3) – частный случай УОП для нелинейного объекта (В-5).

Считается, что УОП выполняются, если матрица D_n невырожденная и ее определитель (детерминант) $\det D_n$ равен постоянному, отличному от нуля числу. В этом случае в задаче быстродействия особых режимов не возникает и оптимальное управление является кусочно-постоянным с максимально допустимыми амплитудами на интервалах.

В противном случае считается, что УОП не выполняются, а из выражения для $\det D_n$ после приравнивания его нулю, в которое, как правило, входят только координаты объекта

$$\det D_n = F(x) = 0, \tag{1-7}$$

определяется уравнение особой траектории, на которой принцип максимума не определяет однозначно управление.

Для нахождения особого управления, обеспечивающего движение по особой траектории, можно воспользоваться несколькими способами. Во-первых, как предложено в [23, 73], по соотношению (1-5) вычисляются дополнительные векторы B_{n+1}, B_{n+2}, … (хотя часто бывает достаточно вычислить один дополнительный вектор B_{n+1}) и образовываются матрицы D_n^k, $k = 1, 2, \ldots$ размера $(n \times n)$ из комбинаций векторов B_1, B_2, …, B_n, B_{n+1}, B_{n+2}, …. Приравнивая нулю определители матриц D_n^k, определяем функциональные зависимости особого управления от координат объекта. Во-вторых, [102], так как уравнения движения объекта (В-5) сохраняются и на особых траекториях, то особое управление может быть определено из совместного решения уравнений объекта (В-5) и уравнения особой траектории (1-7). В-третьих, как показано в [103], меньшие вычислительные трудности имеет способ, по которому для нахождения особого управления приравниваются нулю элементы векторов B_j, $j = 2, 3, \ldots, n$ с подстановкой в них уравнения особой траектории (1-7).

1.1.2. Особые управления в задачах на минимум ресурсов

1.1.2.1. Постановки задач на минимум ресурсов

Большое значение с технической, экономической и экологической точек зрения имеют задачи на минимум ресурсов. Под ресурсами будут пониматься количества материалов, топлива, энергии, различных веществ, поступающих и расходуемых в технологическом процессе для обеспечения качественного выпуска продукции. Цель управления будет заключаться в том, чтобы вести технологические процессы с минимумом материальных и энергетических затрат. К задаче на минимум ресурсов можно отнести и задачи на минимум отклонений координат и управлений в установившихся режимах работы динамических объектов. С экономической точки зрения задачи на минимум ресурсов более важны, чем задачи быстродействия, но и более сложны и разнообразны.

Законченная теория решения задач на минимум ресурсов управляющих воздействий создана для линейных стационарных и нестационарных объектов в работах Н. Н. Красовского [51], Р. Калмана [36], М. Атанса и П. Фалба [8], А. М. Формальского [99]. Для нелинейных объектов известны работы Б. Б. Чупруна [51] по нахождению необходимых условий оптимальности в задачах на минимум отклонений управлений.

Постановка задачи на минимум ресурсов полностью аналогична постановке общей задачи (В-1, В-2). Источником особых ситуаций в задачах на минимум ресурсов являются нелинейные объекты с линейным управлением вида (В-5), а общий интегральный критерий (В-2) в задачах на минимум ресурсов конкретизируется:

1) минимизация расхода вещества или энергии, характеризуемых только координатами объекта (задача на минимум ресурсов координат) с критерием (В-9);

2) минимизация импульса управления с критерием (В-11);

3) минимизация ресурсов линейного управления с критерием (В-10), который является частным случаем критерия (В-11) и применяется для промышленных объектов при знакопостоянном управлении.

Кроме перечисленных частных критериев, в задачах управления технологическими процессами могут минимизироваться комбинации данных критериев, что еще больше увеличивает их разнообразие. Для поставленных задач приведем условия определения существования и вычисления особого управления.

1.1.2.2. Задачи на минимум ресурсов координат

Пусть для объекта (В-5) требуется найти допустимое управление U, $|U| \leq U_{max}$, доставляющее минимум критерию (В-9). Применяя принцип максимума, записываем гамильтониан и вспомогательную систему

$$H = -f_0(x) + \big(\Psi, A(x)\big) + (\Psi, B(x)U),$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial f_0(x)}{\partial x} - \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)^T \Psi.$$

Максимум H по U достигается при кусочно-постоянном управлении

$$U(t) = U_{max}\,\mathrm{sign}\big(\Psi, B(x)\big),$$

которое означает, что

$$U(t) = \begin{cases} +U_{max}, & \text{если } \big(\Psi, B(x)\big) > 0, \\ -U_{max}, & \text{если } \big(\Psi, B(x)\big) < 0. \end{cases}$$

Если на некотором интервале времени $t \in [t_1, t_2]$ скалярное произведение $\left(\Psi, B(x)\right)$ и его производные по времени тождественно равны нулю, то принцип максимума не позволяет однозначно определить оптимальное управление и встает вопрос об определении особых управлений. УОП для нелинейных объектов, предложенные для задачи быстродействия, не обеспечивают вычисление особого управления в рассматриваемой задаче по двум обстоятельствам [102]. Во-первых, для задач на минимум ресурсов нельзя гарантировать принадлежность управлений к классу кусочно-постоянных функций. Значит, в УОП нужно обязательно вводить производные управления по времени, так как они могут быть функциями кусочно-непрерывными. Во-вторых, следует учитывать наличие переменных в функционале.

Поэтому для исследования особых ситуаций в задаче на минимум ресурсов (В-5, В-9) вводятся УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат R_{n+1} [101,102], для чего, следуя основоположникам принципа максимума, определяется дополнительная координата x_0, учитывающая подынтегральное выражение в функционале (В-9) по уравнению

$$\dot{x}_0 = f_0(x).$$

В $(n+1)$-мерном пространстве координат получили расширенную систему $(n+1)$-го уравнения

$$\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x}) + B(\tilde{x})U,$$

где $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \subset R_{n+1}$, $A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} f_0(x) \\ A(x) \end{pmatrix}$, $B(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x) \end{pmatrix}$.

Пусть максимум гамильтониана для расширенной системы, который определяется максимумом выражения $H' = \left(\widetilde{\Psi}, B(\tilde{x})U\right)$, на интервале времени $t \in [t_1, t_2]$ достигается на грани или ребре многогранника ограничений по управлению Ω. Тогда на интервале $t \in [t_1, t_2]$ скалярное произведение $\left(\widetilde{\Psi}, B(\tilde{x})\omega\right)$ равно нулю, где ω – вектор, параллельный некоторой грани или ребру Ω. Геометрическая интерпретация возникшей ситуации в случае двух управлений показана на рис. 1.1, где неопределенной является величина управления U_1.

Продифференцировав выражение $\left(\widetilde{\Psi}, B(\tilde{x})\right) = 0$ n раз по времени с учетом производных управления по времени, получим систему $(n+1)$-го уравнения

$$\begin{gathered}\left(B_1(\tilde{x}) \quad B_2(\tilde{x},U) \quad B_3\left(\tilde{x},U,\dot{U}\right) \quad \dots\right. \\ \left.\dots \quad B_{n+1}\left(\tilde{x},U,\dot{U},\dots,U^{(n+1)}\right)\right)^T\tilde{\Psi}=0,\end{gathered} \tag{1-8}$$

где векторы B_j, $j=2,3,\dots,n,n+1$ определяются из рекуррентного соотношения

$$\begin{gathered}B_j\left(\tilde{x},U,\dot{U},\dots\right)=\frac{\partial B_{j-1}}{\partial U^{(j-3)}}\frac{d^{(j-2)}U}{dt^{(j-2)}}+ \\ +\frac{\partial B_{j-1}}{\partial\tilde{x}}(A(\tilde{x})+B(\tilde{x})U)-\left(\frac{\partial A(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}}+\frac{\partial B(\tilde{x})U}{\partial\tilde{x}}\right)B_{j-1}, \\ B_1(\tilde{x})=B(\tilde{x}).\end{gathered} \tag{1-9}$$

Первое слагаемое в выражении (1-9) учитывает производные управления по времени первого и выше порядков. В точках сопряжения неособого и особого управления производная управления по времени не существует.

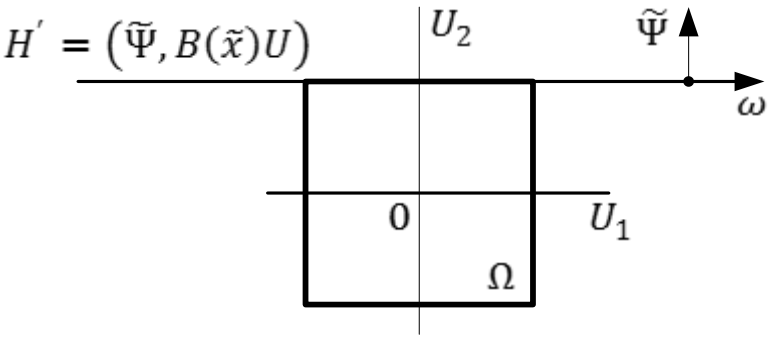

Рис. 1.1. Возникновение особой ситуации

Здесь применяется формальный прием для получения многократно продифференцированного управления. Точнее, производные U по t определяются на открытом интервале $t\in(t_1,t_2)$, а затем при стыковке неособого и особого участков (или наоборот) начальные условия для производных U выбираются из открытого интервала (на них не накладывается ограничений, в отличие от амплитуды управления) и путем прогонки решений по величине функционала определяются оптимальные значения начальных условий для управления и его производных по времени.

Определим матрицу D_{n+1} размера $(n+1)\times(n+1)$ как матрицу, столбцами которой являются векторы B_j, $j=1,2,3,\dots,n,n+1$

$$D_{n+1} = (B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n \quad B_{n+1}).$$

Тогда система (1-8) преобразуется к уравнению

$$D_{n+1}^T \widetilde{\Psi} = 0,$$

которое всегда выполняется, если матрица D_{n+1} вырожденная и ее детерминант равен нулю.

По аналогии с введенными ранее УОП для линейных [61] и нелинейных [73] объектов считается, что УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат R_{n+1} выполняются, если ранг матрицы D_{n+1} равен $n+1$, т. е. матрица D_{n+1} невырожденная и $\det D_{n+1}$ равен постоянному, отличному от нуля числу.

Следует отметить, что в вектор $B_1(\tilde{x})$ уравнений (1-8, 1-9) не включено управление, в отличие от УОП для линейных систем, введенных в работе [61]. Это сделано потому, что здесь рассматривается случай скалярного управления U, тогда как в условиях общности положения [61] фигурирует вектор ω, имеющий направление одного из ребер многогранника Ω ограничений по U. Так как многогранник Ω ограничений U имеет конечное число ребер, то проверка условий общности положения осуществляется конечным числом операций для каждой компоненты вектора U. Можно показать, что особые управления, вычисленные при векторах $B_1(\tilde{x}) = B(\tilde{x})$ и $B_1(\tilde{x}, U) = B(\tilde{x})U$, совпадают.

Из выражения детерминанта матрицы D_{n+1} после приравнивания его нулю можно выделить следующие ситуации, в которых УОП для нелинейных объектов в R_{n+1} не выполняются:

1) $\det D_{n+1} = F(x) = 0$ – случай конечного числа особых траекторий, для определения особых управлений в этом случае можно воспользоваться способами, описанными в п. 1.1.1.3;

2) $\det D_{n+1} = F\left(x, U, \dot{U}, \dots\right) = 0$ – случай множества особых траекторий и управлений – это отличительная особенность задач на минимум ресурсов;

3) $\det D_{n+1} \equiv 0$ – случай, когда УОП не выполняются для любых координат и управлений, принцип максимума, как необходимое условие оптимальности, удовлетворяется для произвольных управлений и оптимальное управление в задаче неединственно.

Технику применения УОП для нелинейных объектов в R_{n+1} покажем на примере, взятом из работы [133]. Пример взят с линейным

объектом потому, что, во-первых, в большинстве работ с примерами особых управлений [8, 77, 91, 124, 125] рассматриваются только линейные объекты с нелинейным функционалом, во-вторых, решение примера носит иллюстративный характер. Для объекта $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = U$ требуется найти управление U, минимизирующее квадратичный по координатам функционал $I = 0.5\int_0^T (x_1^2 + x_2^2)\,dt$, T не задано. В работе [133] особое управление $U_{oc} = x_1$ вычислено из анализа вспомогательных переменных и уравнений движения объекта.

Используя УОП для нелинейных объектов в $R_{n+1} = R_3$, запишем для поставленной задачи матрицы

$$A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0.5(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По рекуррентному соотношению (1.22) вычислим векторы

$$B_2(\tilde{x}) = -\frac{\partial A(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} B_1(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3(\tilde{x}, U) = \frac{\partial B_2(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}}(A(\tilde{x}) + B(\tilde{x})U) - \frac{\partial A(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} B_2(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} x_1 - U \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя детерминант матрицы D_3, образованной из векторов B_1, B_2, B_3, получим, что УОП в R_3 не выполняются на множестве особых траекторий

$$\det D_3 = U - x_1 = 0,$$

движение по которым обеспечивается особым управлением $U_{oc} = x_1$, совпадающим с результатом работы [133].

Дополнительно покажем, что особые управления, вычисленные при начальных векторах $B_1(\tilde{x}) = B(\tilde{x})$ и $B_1(\tilde{x}, U) = B(\tilde{x})U$, совпадают. Если принять $B_1(\tilde{x}, U) = B(\tilde{x})U = (0 \quad 0 \quad U)^T$, то, определяя векторы B_2 и B_3 по рекуррентному соотношению (1-9), получим

$$B_2(\tilde{x}, U, \dot{U}) = \begin{pmatrix} -x_2 U \\ -U \\ -\dot{U} \end{pmatrix}, \qquad B_3(\tilde{x}, U, \dot{U}, \ddot{U}) = \begin{pmatrix} -x_1 U - U^2 - 2x_2\dot{U} \\ -2\dot{U} \\ \ddot{U} \end{pmatrix}.$$

Составляя матрицу D_3 из векторов $B_1(\tilde{x}, U)$, $B_2(\tilde{x}, U, \dot{U})$, $B_3(\tilde{x}, U, \dot{U}, \ddot{U})$, определим, что УОП не выполняются, если $\det D_3 = U^3(U - x_1) = 0$.

После сокращения на скаляр U^3 находим особое управление $U_{oc} = x_1$, что совпадает с полученным при $B_1(\tilde{x}) = B(\tilde{x})$.

Из примера видно, что предложенный аппарат УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве переменных универсален, формализован и удобен для исследования особых ситуаций в задачах на минимум ресурсов координат и потому быстрее приводит к цели, так как не требует трудоемкого анализа вспомогательных переменных Ψ.

1.1.2.3. Задачи на минимум ресурсов линейного управления

Пусть для нелинейного объекта (В-5) с линейным скалярным управлением требуется определить допустимое управление $U(t)$, $0 \le U_{min} \le U \le U_{max}$, минимизирующее критерий вида (В-10)

$$I = \int_0^T U\, dt, \tag{1-10}$$

где T – время перехода – не задано. Поставленная задача часто встречается при управлении технологическими процессами, когда знакоположительное управление соответствует расходу в единицу времени какого-либо вещества, подающегося на вход объекта.

Из принципа максимума запишем функцию Гамильтона H и систему для вспомогательного вектора Ψ при $\Psi_0 = -1$

$$H = -U + \big(\Psi, A(x)\big) + (\Psi, B(x)U),$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = -\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)^T \Psi.$$

Максимум функции H по U определяется выражением $H' = -U + (\Psi, B(x)U)$, поэтому оптимальное управление будет кусочно-постоянным по уравнению

$$U(t) \equiv \operatorname{sign}\Big(\big(\Psi, B(x)\big) - 1\Big) = \begin{cases} U_{max}, & \text{если } \big(\Psi, B(x)\big) > 1, \\ U_{min}, & \text{если } \big(\Psi, B(x)\big) < 1. \end{cases}$$

Если на некотором интервале времени $t_1 \le t \le t_2$ выполняется равенство

$$\left(\Psi, B(x)\right) = 1 \tag{1-11}$$

и, соответственно, производные $\frac{d^p\left(\Psi, B(x)\right)}{dt^p}$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ тождественно равны нулю, то имеет место особый режим, так как принцип максимума не позволяет однозначно выразить оптимальное управление через вспомогательный вектор.

Для вычисления особого управления в ситуации (1-11) вводятся УОП для нелинейного объекта (В-5) и функционала (1-10) [101, 102]. С этой целью определяется n производных по времени скалярного произведения (1-11), при этом предполагается, что производные управления по времени существуют. Тогда в особой ситуации справедлива система уравнений

$$\begin{gathered}\left(B_2(x,U) \quad B_3\left(x,U,\dot{U}\right) \quad \ldots \right.\\ \left. B_n\left(x,U,\dot{U},\ldots,U^{(n-2)}\right) \quad B_{n+1}\left(x,U,\dot{U},\ldots,U^{(n-1)}\right)\right)^T \Psi = 0,\end{gathered} \tag{1-12}$$

где векторы $B_j\left(x,U,\dot{U},\ldots\right)$, $j = 2, 3, \ldots, n+1$ определяются из рекуррентного соотношения

$$\begin{gathered}B_j\left(x,U,\dot{U},\ldots\right) = \frac{\partial B_{j-1}}{\partial U^{(j-3)}}\frac{d^{(j-2)}U}{dt^{(j-2)}} + \\ + \frac{\partial B_{j-1}}{\partial x}\left(A(x) + B(x)U\right) - \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)B_{j-1}, \\ B_1(x) = B(x).\end{gathered} \tag{1-13}$$

Если образовать матрицу D_n размера $n \times n$ как матрицу, столбцами которой являются векторы B_j, $j = 2, 3, \ldots, n, n+1$

$$D_n = (B_2 \quad B_3 \quad \ldots \quad B_n \quad B_{n+1}),$$

то система (1-12) сведется к уравнению

$$D_n^T \Psi = 0. \tag{1-14}$$

Из соотношения (1-11) следует, что $\Psi \neq 0$. Поэтому для выполнения уравнения (1-14) необходимо, чтобы матрица D_n была вырожденной, или $\det D_n = 0$.

Если определитель матрицы D_n равен постоянному, отличному от нуля числу, то считается, что УОП для нелинейных объектов в задаче (В-5, 1-10) выполняются, особых режимов нет, оптимальное управление однозначно определяется принципом максимума и имеет релейный характер. В противном случае УОП не выполняются, а из уравнения

$$\det D_n = F\left(x, U, \dot{U}, \dots\right) = 0 \tag{1-15}$$

определяется множество особых управлений в функции координат не линейного объекта.

Следует отметить, что в матрицу D_n не входит вектор $B_1(x) = B(x)$. Если же ввести УОП для задачи (В-5, 1-10) в расширенном пространстве координат R_{n+1}, то потребуется новая переменная x_0, удовлетворяющая уравнению $\dot{x}_0 = U$. Тогда в расширенном пространстве координат вектор $B(\tilde{x})$ примет вид $B(\tilde{x}) = (1 \quad f^1(x) \quad f^2(x) \quad \dots \quad f^n(x))^T$. Если определить векторы $B_j\left(\tilde{x}, U, \dot{U}, \dots\right)$, $j = 2, 3, \dots, n, n+1$ по соотношениям (1-13) в расширенном пространстве координат, то в векторах $B_j\left(\tilde{x}, U, \dot{U}, \dots\right)$ элементы первой строки равны нулю. Если затем образовать матрицу

$$D_{n+1} = (B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_n \quad B_{n+1}),$$

то выражение для $\det D_{n+1}$ будет совпадать с выражением $\det D_n$ (1-15), что очевидно. В дальнейшем используется выражение для $\det D_n$, так как при этом сокращаются размеры матриц B_j.

1.1.2.4. Задачи на минимум импульса управления

Для нелинейного объекта (В-5) с линейным скалярным управлением требуется найти допустимое управление $U(t)$, $|U| \leq U_{max}$, минимизирующее критерий вида (В-11)

$$I = \int_0^T |U|\, dt, \tag{1-16}$$

где T – время перехода – не задано. Основным источником задач на минимум импульса управления, которая часто называется задачей на минимум расхода топлива, являются проблемы управления самолетами и ракетно-космическими аппаратами, где управляющие воздействия создаются за счет дискретных расходов топлива или рабочего тела, запасы которых ограничены [8, 88, 99].

Имеется большое число работ, где рассматривается общая задача на минимум расхода топлива [8, 51, 99 и библиографии к ним]. Решения многих задач об оптимальном расходовании топлива были получены без помощи принципа максимума, используемые при этом способы в большинстве своем представляют комбинацию классических вариационных методов и физических обоснований. Применение принципа максимума для решения линейных задач рассмотрено в работе [8].

Для поставленной нелинейной задачи (В-5, 1-16) по принципу максимума функция Гамильтона H и вспомогательная система для Ψ при $\Psi_0 = -1$ равны

$$H = -|U| + \big(\Psi, A(x)\big) + (\Psi, B(x)U),$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = -\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)^T \Psi.$$

Максимум функции H по U определяется выражением

$$H' = -|U| + (\Psi, B(x)U),$$

из чего следует, что кусочно-постоянное оптимальное управление выразится через вспомогательный вектор Ψ в виде

$$U(t) = U_{max}\,\mathrm{dez}\big(\Psi, B(x)\big),$$

где функция dez («зона нечувствительности») [8] означает знаковую функцию с зоной нечувствительности

$$U(t) = U_{max}\,\mathrm{dez}\big(\Psi, B(x)\big) =$$
$$= \begin{cases} U_{max}\,\mathrm{sign}\big(\Psi, B(x)\big), & \text{если } \big|\big(\Psi, B(x)\big)\big| > U_{max}, \\ 0, & \text{если } \big|\big(\Psi, B(x)\big)\big| < U_{max}, \\ -U_{max} \le U \le +U_{max}, & \text{если } \big|\big(\Psi, B(x)\big)\big| = U_{max}. \end{cases} \qquad (1\text{-}17)$$

Последняя строка в (1-17) характеризует так называемый вырожденный режим.

Как правило, для линейных объектов принцип максимума однозначно определяет оптимальное управление по формуле (1-17) [8]. В этой работе получены условия вырожденности для задачи на минимум расхода топлива для линейных объектов. Кроме того, вырожденные ситуации для некоторых классов нелинейных объектов рассматривались в работах [8, 121, 126], где вырожденное управление вычислялось из пошаговой процедуры использования необходимых условий принципа максимума. В этом случае анализировалась система для Ψ на существование вырожденного режима, что является трудоемким процессом.

Введем УОП для нелинейных объектов в задаче (В-5, 1-16) [22], которые позволяют качественно определять существование вырожденного режима и вычислить вырожденное управление непосредственно из системы дифференциальных уравнений объекта (В-5), не рассматривая системы вспомогательных переменных.

Предположим, что функция времени, задаваемая скалярным произведением $\big(\Psi, B(x)\big)$, при $t_1 \le t \le t_2$ постоянна и равна

$$\big(\Psi, B(x)\big) = U_{max}, \tag{1-18}$$

тогда на $t \in [t_1, t_2]$ производные по времени функции $\big(\Psi, B(x)\big)$ равны нулю. Дифференцируя (1-18) n раз по времени, как это сделано в [8], при этом учитывая, что оптимальное управление в задаче на минимум расхода топлива является кусочно-постоянным [8], получим систему n уравнений

$$(B_2(x,U) \quad B_3(x,U) \quad \dots \quad B_n(x,U) \quad B_{n+1}(x,U))^T \Psi = 0, \tag{1-19}$$

где векторы $B_j(x,U)$, $j = 2, 3, \dots, n, n+1$ определяются из рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} B_j(x,U) = \frac{\partial B_{j-1}(x,U)}{\partial x}(A(x) + B(x)U) - \\ -\left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right) B_{j-1}(x,U), \end{aligned} \tag{1-20}$$

а вектор $B_1(x)$ равен вектору $B(x)$ из системы (1.6).

Если составить матрицу D_n размера $n \times n$, столбцами которой являются векторы $B_j(x, U)$, $j = 2, 3, \dots, n, n+1$

$$D_n = (B_2 \quad B_3 \quad \dots \quad B_n \quad B_{n+1}),$$

то система уравнений (1-19) сводится к уравнению

$$D_n^T \Psi = 0. \tag{1-21}$$

Так как из выражения (1-18) следует, что $\Psi \neq 0$, то для выполнения уравнения (1-21) необходимо, чтобы матрица D_n была вырожденной. Запишем это в виде условия

$$\det D_n = F(x, U) = 0. \tag{1-22}$$

Таким образом, если матрица D_n невырожденная и ее детерминант равен постоянному, отличному от нуля числу, то вырожденного режима в задаче на минимум расхода топлива не существует, оптимальное управление однозначно определяется принципом максимума. В противном случае вырожденный режим существует и из условия (1-22) получаем зависимость вырожденного управления от координат. Если же детерминант матрицы тождественно равен нулю, то это означает неединственность вырожденного, а также и оптимального управления. При этом условие (1-22) выполняется для любых управлений, отсюда на интервале вырожденности получаем тривиальное решение $U = 0$, но не являющееся вырожденным по определению функции dez.

В случае линейного объекта управления, когда в уравнении (B-5) $A(x) = Ax$ и $B(x) = B$, из соотношения (1-20) вычислим векторы $B_j = (-1)^{j-1} A^{j-1} B$, $j = 2, 3, \dots, n+1$, тогда полученное здесь условие вырожденности (1-21) совпадает с найденным в работе [8].

Покажем применение предлагаемых условий вырожденности. Пусть требуется определить вырожденное управление в задаче, приведенной в работе [8, с. 651]:

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1^3}{3} + U, \qquad \dot{x}_2 = x_1, \qquad I = \int_0^T |U|\, dt.$$

Из многошаговой процедуры использования необходимых условий, даваемых принципом максимума, в работе [8] показано, что в поставленной задаче возникает вырожденный режим.

Применим полученные выше результаты. Для нахождения вырожденного управления образуем матрицу D_2 из векторов B_2, B_3, вычисленных по соотношению (1-20):

$$D_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1^4 + 2x_1U \\ -1 & -x_1^2 \end{pmatrix}.$$

Определив детерминант матрицы D_2 и приравняв его нулю, получим уравнение, связывающее вырожденное управление и фазовые переменные: $U_{\text{в}} = \frac{x_1^3}{3}$. Подставляя $U_{\text{в}}$ в уравнение для $\dot{x}_1$, определим вырожденные фазовые траектории $x_{1\text{в}} = const$. Полученные результаты по вырожденному режиму совпадают с результатами работы [8], причем здесь не потребовался анализ вспомогательных переменных.

1.1.3. Свойства особого управления

1.1.3.1. Оптимальность особого управления

Оптимальность особого управления можно проверить численно, отыскивая величину функционала на проварьированных траекториях, либо аналитическим путем – путем применения необходимых условий оптимальности особого управления типа Келли [39] или Коппа – Мойера [47], а также пакета вариаций [20, 22, 34, 85] или индуцированного гамильтониана. Практическое применение указанных условий затрудняет форма их представления в виде функции, зависящей от вспомогательных переменных Ψ. Например, необходимые условия оптимальности особого управления высокого порядка [39, 47] записываются в виде неравенства, связывающего координаты объекта x и вспомогательные переменные Ψ:

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)\right) = \Phi(x, \Psi) \leq 0. \qquad (1\text{-}23)$$

Для исключения вспомогательных переменных из условий оптимальности (1.36) нужно [102], используя соответствующие поставленной задаче условия возникновения особой ситуации, записанные

относительно переменных Ψ и координат x, определить аналитическую зависимость вида $\Psi(x)$. Если в задаче существует множество особых траекторий, когда необходимо найти области их оптимальности, получение зависимости $\Psi(x)$ на особом интервале, как правило, не вызывает затруднений. Подставляя зависимость $\Psi(x)$ в исходное неравенство (1-23), находим области оптимальности особого управления в явном виде от координат и параметров нелинейного объекта:

$$(-1)^q \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{d^{2q}}{dt^{2q}}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)\right) = \Theta(x) \leq 0.$$

Рассмотрим два примера, подтверждающих приведенные рассуждения.

Пример 1. Для задачи

$$\dot{x}_1 = U, \qquad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 - x_2, \qquad |U| \leq 1, I = \int_0^T x_1\, dt$$

имеем из принципа максимума зависимости

$$H = -x_1 + \Psi_1 U + \Psi_2(x_1 - x_1^2 - x_2), \qquad U = \operatorname{sign}(\Psi_1),$$
$$\dot{\Psi}_1 = 1 - \Psi_2 + 2x_1\Psi_2, \qquad \dot{\Psi}_2 = \Psi_2.$$

Условие Келли в виде $\Phi(x, \Psi) \leq 0$ запишется

$$\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial U}\frac{d}{dt}\dot{\Psi}_1 =$$
$$= \frac{\partial}{\partial U}\left(-\dot{\Psi}_2 + 2U\Psi_2 + 2x_1\dot{\Psi}_2\right) = 2\Psi_2 \geq 0. \tag{1-24}$$

Для нахождения области оптимальности особого управления в виде $\Theta(x) \leq 0$ следует исключить Ψ_2 из неравенства (1-24). Для этого воспользуемся условием особого режима

$$\Psi_1 = 0, \qquad \dot{\Psi}_1 = 1 - \Psi_2 + 2x_1\Psi_2 = 0, \qquad \Psi_2 = \frac{1}{1 - 2x_1},$$

подставляя последнее в (1-24), находим, что особое управление оптимально при $x_1 < 0.5$.

Пример 2. Для задачи

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 U - k_1\sqrt{x_1}, \qquad \dot{x}_2 = \alpha_2 U - k_2\sqrt{x_2},$$

$$0 \le U \le 1, I = \int_0^T U\,dt$$

требуется построить области оптимальности особого управления при неотрицательных значениях фазовых координат $\{0 \le x_1 \le x_{1m}, 0 \le$ *x2≤x2m.*

Из принципа максимума запишем функции

$$H = -U + \Psi_1\left(\alpha_1 U - k_1\sqrt{x_1}\right) + \Psi_2\left(\alpha_2 U - k_2\sqrt{x_2}\right),$$

$$\dot{\Psi}_1 = \frac{k_1\Psi_1}{2\sqrt{x_1}}, \qquad \dot{\Psi}_2 = \frac{k_2\Psi_2}{2\sqrt{x_2}}.$$

Определим выполнение условия Келли в функции вспомогательных переменных и состояний системы $\Phi(x, \Psi) \le 0$

$$\frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial H}{\partial U}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\dot{\Psi}_1 + \alpha_2\dot{\Psi}_2\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\alpha_1 k_1}{2}\left(\frac{\dot{\Psi}_1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{\Psi_1}{4\sqrt{x_1^3}}\dot{x}_1\right) + \frac{\alpha_2 k_2}{2}\left(\frac{\dot{\Psi}_2}{2\sqrt{x_2}} - \frac{\Psi_2}{4\sqrt{x_2^3}}\dot{x}_2\right)\right) =$$

$$= \left(-\frac{\alpha_1^2 k_1}{8\sqrt{x_1^3}}\Psi_1 - \frac{\alpha_2^2 k_2}{8\sqrt{x_2^3}}\Psi_2\right) \ge 0.$$

Условия особого режима для задачи минимизации функционала $\int_0^T U\,dt$ имеют вид $\left(\Psi, B(x)\right) = 1$, $\frac{d^p\left(\Psi, B(x)\right)}{dt^p} \equiv 0$, $p = 1, 2, \ldots$. Так как в неравенство $\Phi(x, \Psi) \le 0$ входят две неизвестные вспомогательные переменные Ψ_1 и Ψ_2, то для их нахождения в функции состояния системы следует образовать из условий особого режима систему двух уравнений:

$$\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 = 1,$$

$$\alpha_1\dot{\Psi}_1 + \alpha_2\dot{\Psi}_2 = \frac{\alpha_1 k_1}{2\sqrt{x_1}}\Psi_1 + \frac{\alpha_2 k_2}{2\sqrt{x_2}}\Psi_2 = 0. \qquad (1\text{-}25)$$

Решениями системы (1-25) являются

$$\Psi_1 = \frac{k_2\sqrt{x_1}}{\alpha_1(k_2\sqrt{x_1} - k_1\sqrt{x_2})}, \qquad \Psi_2 = \frac{k_1\sqrt{x_2}}{\alpha_2(k_1\sqrt{x_2} - k_2\sqrt{x_1})},$$

подставляя которые в неравенство $\Phi(x, \Psi) \leq 0$ запишем области оптимальности особого управления в явном виде от состояния и параметров объекта

$$\frac{k_1 k_2}{8x_1x_2}\left(\frac{\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2}{k_2\sqrt{x_1} - k_1\sqrt{x_2}}\right) \geq 0.$$

Сомножитель $\frac{k_1k_2}{8x_1x_2}$ в области ограничения на фазовые координаты положителен, поэтому окончательно условие Келли в форме $\Theta(x) \leq 0$ для поставленной задачи примет вид

$$\frac{\alpha_2 x_1 - \alpha_1 x_2}{k_2\sqrt{x_1} - k_1\sqrt{x_2}} \geq 0.$$

1.1.3.2. Качественная связь особых управлений и скользящих режимов

В общем случае оптимальное управление может не существовать. Однако практически всегда существует такая последовательность измеримых управлений $U_m(t)$, $0 \leq t \leq t_{1m}$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих $U_m(t) \in \Omega$, что соответствующая последовательность траекторий $x_m(t)$ сходится к некоторой предельной кривой $x^*(t)$, $0 \leq t \leq T$, $T = \lim_{m\to\infty} t_{1m} < \infty$, удовлетворяющей граничным условиям, а значения минимизирующего функционала стремятся к своей нижней грани. Если предельная кривая $x^*(t)$, $0 \leq t \leq T$ является траекторией системы при некотором измеримом управлении $U^*(t) \in \Omega$, $0 \leq t \leq T$, то $U^*(t)$ и есть искомое оптимальное управление. Если же $x^*(t)$ не реализуется никаким измеримым управлением $U(t) \in \Omega$, $0 \leq t \leq T$, то движение фазовой точки вдоль $x^*(t)$ называется скользящим оптимальным режимом [23]. Сама функция $x^*(t)$ называется предельной траекторией [23] или функцией нулевой близости скользящего режима [18, 52].

Для отыскания скользящих режимов в работе [23] вводится вспомогательная расщепленная задача и затем в [18, 23] доказывает-

ся, что все скользящие режимы исходной задачи находятся среди оптимальных траекторий расщепленной задачи. Способ нахождения скользящих режимов путем преобразования исходной задачи к расщепленной и решения последней трудоемок тем, что расщепленная задача сложнее по своей постановке исходной. Например, для исходной задачи

$$\dot{x} = A(x) + B(x)U, \qquad I = \int_0^T f_0(x)\,dt,$$

расщепленная задача примет вид

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(x) + B(x)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i\,, \qquad I = \int_0^T f_0(x)\,dt, \\ \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \qquad U_i \in \Omega, i = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{1-26}$$

Более рациональным является путь предварительного качественного анализа существования скользящего режима по виду исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений объекта и функционала с помощью УОП для нелинейных объектов [102].

Предпосылкой применения УОП к исследованию скользящих режимов является то, что оптимальные скользящие режимы в исходной задаче находятся среди особых решений принципа максимума для расщепленной задачи [23, 52]. Расщепленная задача, как и исходная, линейна по управлению, поэтому можно утверждать, что если в исходной задаче не выполняются УОП, то и в расщепленной задаче существует особое решение, и, следовательно, в исходной задаче – оптимальный скользящий режим, причем особая траектория является предельной для скользящего режима.

Таким образом, не решая расщепленную задачу, а применяя УОП к исходной задаче и затем исследуя поведение нелинейного объекта на особой траектории, можно сделать вывод о существовании оптимального скользящего режима с учетом возможностей реализации особой траектории. При этом можно предположить, что если не существует допустимого особого управления, реализующего особую траекторию, то решение задачи возможно только в скользящем

режиме. Если допустимое особое управление для реализации особой траектории существует, то существует и оптимальный скользящий режим. Особая и предельная траектории в этом случае совпадают. Если УОП тождественно не выполняются для любых управлений и координат объекта, то существует множество предельных траекторий, причем величина функционала остается постоянной для каждой из них и ограничения на координаты при организации движения вдоль них в скользящем режиме или с конечным числом переключений также не влияют на величину функционала. Правильность данных предположений подтверждается на примерах.

Пример 1. Рассмотрим задачу, взятую из [34], о наискорейшем попадании в начало координат по траектории системы

$$\dot{x}_1 = U, \qquad \dot{x}_1 = |U| - x_1^2, \qquad |U| \leq 1, \tag{1-27}$$

при начальном условии $x(0) = (0, x_{20})$, $x_{20} < 0$. В работе показывается, что минимальное время перехода можно получить с помощью последовательности управлений $\{U_m(t)\}$, $|U_m| = 1$ при числе переключений $(2m-1) \to \infty$. Соответствующая последовательность траекторий $\{x_{1m}(t), x_{2m}(t)\}$ сходится на $t \in [0, T]$ к вектор-функции $x^*(t) = (x_1^*(t) \quad x_2^*(t))$, где $x_1^*(t) = 0$, $x_2^*(t) = t + x_{20}$, которая получается при решении расщепленной задачи типа (1-26)

$$\dot{x}_1 = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2, \qquad \dot{x}_2 = \alpha_1 |U_1| + \alpha_2 |U_2| - x_1^2,$$

если путем перебора управлений $\{\alpha, U\}$ принять $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $U_1 = +1$, $U_2 = -1$.

Применим для анализа существования скользящего режима в данной задаче УОП для нелинейных объектов. Образуем матрицу $D_2 = (B_1 \quad B_2)$ по рекуррентному соотношению (1-5)

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2x_1 \end{pmatrix}.$$

УОП не выполняются, если ранг матрицы D_2 меньше двух, что дает уравнение особой траектории $x_1 = 0$. Из анализа исходной системы (1-27) следует, что движение по $x_1 = 0$ для попадания в начало координат не реализуется ни при каком управлении $|U| \leq 1$. Особую траекторию $x_1 = 0$ получаем и при рассмотрении расщепленной задачи, а

на основе выпуклого замыкания [15, 52] траекторию $x_1 = 0$ можно получить как предел всюду сходящихся последовательностей траекторий исходной системы. Поэтому решение поставленной задачи единственно и возможно только в виде оптимального скользящего режима.

Пример 2. Рассмотрим задачу, иллюстрирующую связь особых и скользящих режимов, а именно покажем, что наряду со скользящим режимом может существовать минималь $\left(x^*(t), U^*(t)\right) \in R_{n+1} \times \Omega$, причем $x^*(t)$ является функцией нулевой близости для оптимального скользящего режима и особой траекторией, реализуемой управлением $U^*(t) \in \Omega$. Для нелинейной задачи на минимум ресурсов координат

$$\dot{x}_1 = U, \qquad \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2, |U| \leq 1, \qquad I = \int_0^T x_1^2\, dt.$$

УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве R_3 не выполняются на особой траектории $x_1^* = 0$, которая реализуется особым управлением $U^* = 0$. Особая траектория включается в траекторию движения системы при определенных граничных условиях, если $x(T) < x(0)$.

Рассмотрим процесс перехода при граничных условиях $x(0) = (1,1)$, $x(T) = (0.47, 0.2209)$. Особое оптимальное управление имеем на интервале $x_2 \in [x_{21}, x_{22}]$, где $x_{21} = 0.5$, $x_{22} = 0.3$ при $x_1^* = 0$ (рис. 1.2.а). Если интервал $[x_{21}, x_{22}]$ разбить на m равных подынтервалов, а затем рассмотреть режим переключений с базовым управлением $|U_m| = 1$ на каждом подинтервале (рис. 1.2.а), то оказывается, что при числе переключений $(2m - 1) \to \infty$ значения I и T стремятся к своим нижним граням $I^* = 0$, $T^* = 0.51$, получаемым при особом оптимальном управлении (рис. 1.2.б). Таким образом, для данной задачи оптимальное управление возможно как в виде особого управления $U^* = 0$ на $x_1^* = 0$, так и в виде оптимального скользящего режима с функцией нулевой близости $x^*(t) = (0, x_{20}e^{-t})$.

Пример 3. Исследуем оптимальную задачу на минимум ресурсов для нелинейного объекта с произведением координат

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = x_1(k - x_2 - x_2^2), \qquad |U| \leq 1, I = \int_0^T x_1\, dt.$$

Граничные условия задаются на линии стационарных состояний $x_1 = 0$. УОП в $R_{n+1} = R_3$ для поставленной задачи тождественно не выполняется, так как $\det D_3 \equiv 0$.

1) Организуем релейное управление $|U| = 1$ с одним переключением, при этом величина функционала определяется по формуле

$$I = \frac{4(x_{2T} - x_{20})}{(2x_{2T} - 1)(2x_{20} - 1)} \tag{1-28}$$

и не зависит от параметра k_1, что равносильно инвариантности I относительно амплитуды управления на интервалах $k_1 = 1$.

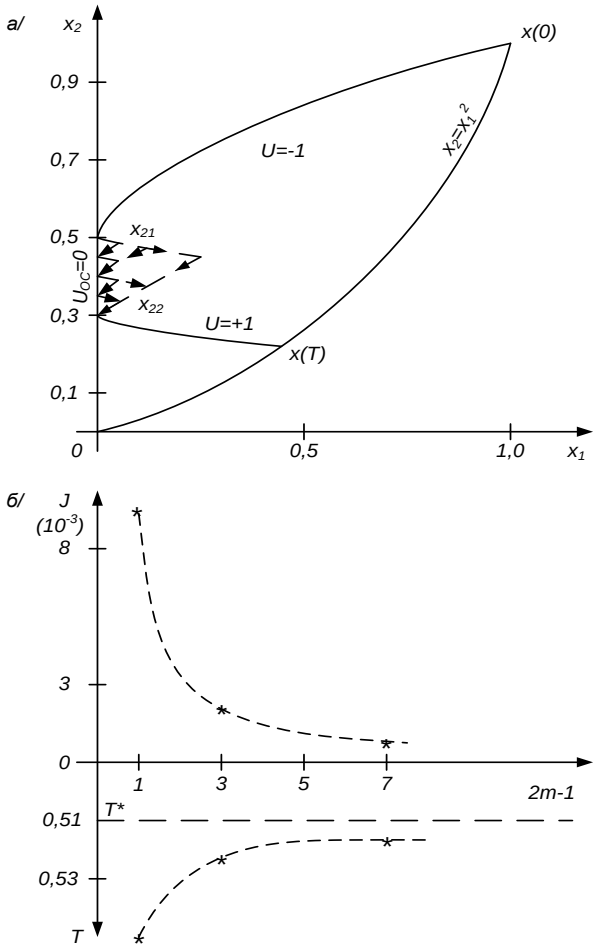

Рис. 1.2. Траектории особого и скользящего режимов

2) При $k_1 = 1$, $x(0) = (0{,}0)$ рассмотрим управление вида

$$U = \begin{cases} +1, & x_1 \in [0, æ], \\ 0, & x_1 = æ, \\ -1, & x_1 \in [æ, x_{1T}], \end{cases} \tag{1-29}$$

где æ – некоторая заданная траектория движения системы $0 < æ < x_{11}$, реализуемая управлением $U = 0$, x_{11} – координата переключения для x_1 при релейном управлении $|U| = 1$ (рис. 1.3.*а*). Величина функционала при управлении (1-29) равна

$$I = \frac{4x_{2T}}{1 - x_{2T}}, \tag{1-30}$$

не зависит от положения æ и совпадает с выражением (1-28) при $x_{20} = 0$. Очевидно, что для поставленной задачи с управлением (1-29) ограничения на координату x_1 справа могут быть любыми.

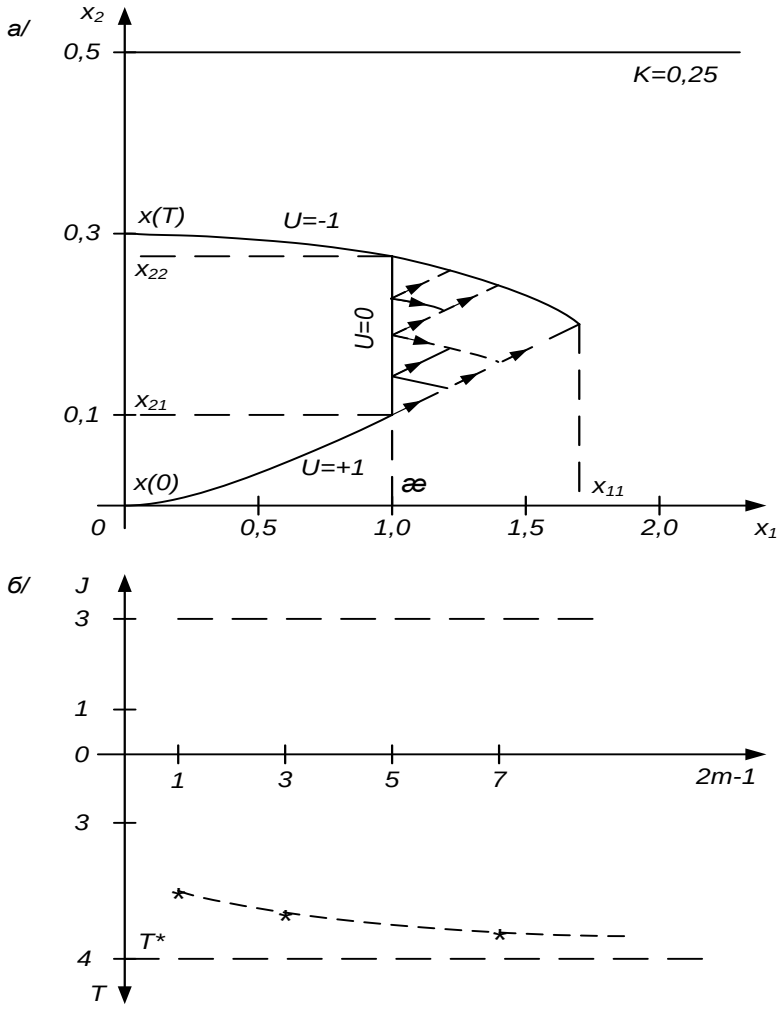

Рис. 1.3. Неединственность управления в скользящих режимах

3) Далее, разбивая интервал $x_2 \in [x_{21}, x_{22}]$ при $x_1 = æ$ и $x_1 = 0$ на m равных подынтервалов и организуя релейное управление $\{U_m\} = \pm 1$ на каждом подынтервале (рис. 1.3.*а*), определим, что величина функционала I на -м подынтервале $(i = 1, 2, \dots, m)$,

$I = \frac{4(x_{22}^i - x_{21}^i)}{(2x_{22}^i - 1)(2x_{21}^i - 1)}$, не зависит от положения æ, равна (1-28) при $x_{21}^i = x_{20}$, $x_{22}^i = x_{2T}$. На рис. 1.3.*б* показаны зависимости величины функционала I и времени перехода T от числа переключений $(2m-1)$ вдоль $æ = 0$. Величина функционала строго постоянна и совпадает с полученными по выражениям (1-28) и (1-30), а время перехода T при $(2m-1) \to \infty$ стремится к значению T^*, определенному при управлении вида (1-29).

Таким образом, рассмотренная задача имеет бесчисленное множество решений. Оптимальное управление возможно в виде релейного управления с одним переключением; в виде управления (1-29); в виде оптимального скользящего режима с вектор-функцией нулевой близости $x^*(t) = \left(x_1^*(t), x_2^*(t)\right)$, где $x_1^*(t) = æ$, $x_2^*(t) = {(æt - 0.5æ^2)}\Big/{(2æt - æ^2 + 4)}$; в виде конечного числа переключений на $x_1 = æ$ и $x_1 = 0$; причем значение функционала при различных релейных управлениях строго постоянно.

Итак, в результате проведенного исследования качественной связи особых и скользящих режимов получили, что УОП для нелинейных объектов позволяют выделить траектории, которые являются особыми и/или предельными для оптимального скользящего режима.

1.1.3.3. Применение УОП для параметрической оптимизации

Для нелинейного по координатам объекта -го порядка с линейным скалярным управлением при дифференциальных связях в векторной форме

$$\dot{x} = p \times (A(x) + B(x)U), \tag{1-31}$$

где x – вектор состояний объекта $(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)$, $A(x)$ – матрица-столбец $(f_1(x) \quad f_2(x) \quad \dots \quad f_n(x))$ размера $(n \times 1)$ в R_n, $B(x)$ – матрица-столбец $(f^1(x) \quad f^2(x) \quad \dots \quad f^n(x))$ размера $(n \times 1)$ в R_n, p – диагональная матрица $\mathrm{diag}(p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_n)$, p_i равно единице или параметру -го звена; при граничных условиях $x(0)$ и $x(T)$, принадлежащих множеству стационарных состояний в R_n, причем множество стационарных состояний остается постоянным при изменении параметров; требуется выбрать такие допустимые значения параметров p_i и такое управление $U \in \Omega$, где Ω – замкнутый ограниченный интервал в R_1, чтобы критерий быстродействия

$$I = \int_0^T 1\, dt \tag{1-32}$$

или критерий на минимум ресурсов координат

$$I = \int_0^T f_0(x)\, dt, \tag{1-33}$$

где T – время перехода – не задано, принимал наименьшее значение. Функции $f_i(x)$, $f^i(x)$, $i = \overline{1,n}$, $f_0(x)$ непрерывны и непрерывно дифференцируемы по x.

Поставленные задачи (1-31, 1-32) или (1-31, 1-33) относятся к классу оптимальных задач с параметрами [16] и возникают при проектировании разомкнутых систем с программным оптимальным управлением $U^*(t)$ и/или с оптимальными значениями изменяемых параметров p^* объекта.

В работе [16] приведены необходимые условия оптимальности управления и параметров, а именно, необходимо существование нетривиального вспомогательного вектора Ψ, удовлетворяющего, например, в задаче на минимум ресурсов (1-31, 1-33) системе при

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{\partial f_0(x)}{\partial x} - \left(\frac{\partial p \times A(x)}{\partial x} + \frac{\partial p \times B(x)U}{\partial x}\right)^T \Psi,$$

условию максимума функции Гамильтона

$$H = -f_0(x) + \big(\Psi, p \times A(x)\big) + (\Psi, p \times B(x)U)$$

и дополнительному соотношению

$$\int_0^T \sum_{\alpha=0}^{n} \Psi_\alpha \frac{\partial(x_\alpha)}{\partial p_i} dt = 0.$$

Аналогичные необходимые условия для оптимальности управления и параметров записываются и для задачи быстродействия (1-31, 1-32).

Поскольку задачи (1-31, 1-32) или (1-31, 1-33) линейны по управлению, то, как показано ранее, оптимальное управление является, если не существует особого режима, кусочно-постоянной функцией времени с максимально допустимыми амплитудами в соответствии с уравнением

$$U^*(t) = U_{max}\,\mathrm{sign}\big(\Psi, p \times B(x)\big).$$

Вхождение вспомогательной вектор-функции Ψ в последнее уравнение для оптимальности управления U, особенно в дополнительное соотношение для параметров, затрудняет решение оптимальной задачи с параметрами, так как получить решение для Ψ практически невозможно из-за неразрешенности двухточечной граничной задачи. Предпочтительнее является путь оценки влияния параметров на характеристики процесса перехода по виду задач (1-31, 1-32), (1-31, 1-33). Для этого в [100] предлагается применить УОП для нелинейных объектов в пространстве R_n для задачи быстродействия и в расширенном пространстве R_{n+1} для задачи на минимум ресурсов, позволяющих исследовать особые ситуации в функции не только координат и управлений, но и параметров объекта. Предпосылками для использования УОП в параметрической оптимизации при кусочно-постоянном управлении являются следующие утверждения.

Если УОП выполняются, что наблюдается для линейных объектов в задаче быстродействия или при линейном задании критерия в задаче на минимум ресурсов, то детерминант матрицы D_n или D_{n+1}, полученной из применения УОП, отличен от нуля и определяется произведением параметров p_i:

$$\det D = \prod_i p_i.$$

Детерминант матрицы D стремится к нулю, когда коэффициенты передачи звеньев стремятся к нулю или постоянные времени звеньев линейного объекта стремятся к бесконечности. При этом система становится неуправляемой, время перехода и величина функционала стремятся к бесконечности. Поэтому, когда УОП выполняются, для решения задачи необходимо выбрать граничные из области допустимых значений параметры, а именно максимальные коэффициенты усиления и минимальные постоянные времени.

Если УОП не выполняются, а из детерминанта матриц D_n или D_{n+1} получается выражение

$$\det D = \prod_i p_i F(x) = 0,$$

в котором параметры являются общими сомножителями перед уравнением конечного числа особых траекторий $F(x) = 0$ и положения особых траекторий не зависят от параметров объекта, то параметрическая оптимизация возможна в зависимости от граничных условий по двум вариантам. Во-первых, если при заданных граничных условиях траектории объекта под кусочно-постоянным оптимальным управлением не достигают особой траектории, то необходимо выбирать, как в случае выполнения УОП, граничные значения параметров. Во-вторых, если для заданных граничных условий траектории объекта при кусочно-постоянном управлении пересекают особую траекторию, то оптимальным является то значение параметра, при котором соответствующая ему траектория касается особой траектории.

Если в задаче на минимум ресурсов УОП не выполняются, а из детерминанта матрицы D_{n+1} определяется множество особых траекторий и управлений, зависящее от параметров

$$\det D_{n+1} = F\left(p, x, U, \dot{U}, \dots\right) = 0,$$

то зависимость величины функционала I (1-33) от параметра является экстремальной. Оптимальное значение параметра p_i^* может быть определено из соответствующей зависимости $I(p_i^*)$ аналитически, если это возможно, или численным путем.

Проиллюстрируем эти утверждения на примерах.

Пример 1. Рассмотрим влияние параметров k_1, τ нелинейного объекта

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = \tau^{-1}(x_1^2 - x_2), \qquad |U| \le 1,$$

в задаче быстродействия и на минимум ресурсов $J = \int_0^T x_1^2\, dt$.

УОП в R_2 для задачи быстродействия и в R_3 для задачи на минимум ресурсов не выполняются, так как

$$\det D_2 = -2k_1^2\tau^{-1}x_1 = 0,$$
$$\det D_3 = 4k_1^3\tau^{-2}x_1^2 = 0.$$

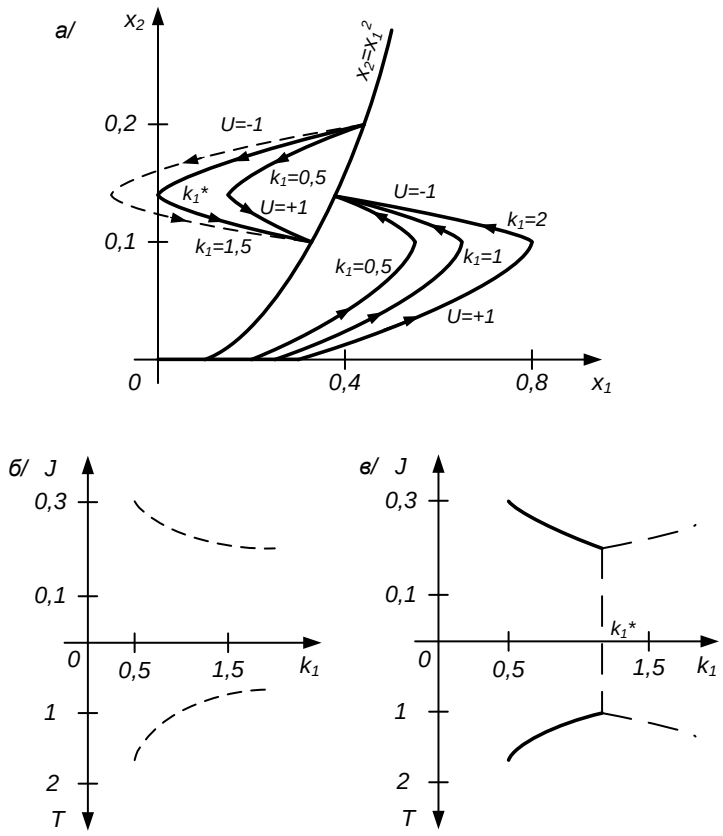

Рис. 1.4. Параметрическая оптимизация при одной особой траектории

Из последних выражений определяется уравнение особой траектории $x_{1oc} = 0$, а параметры k_1, τ, являющиеся общими сомножителями, опускаются. Численным путем для различных граничных условий можно показать, что для $x(T) > x(0)$, когда траектории объекта под управлением $\{+1, -1\}$ и различных k_1 не достигают особой траектории (рис. 1.4.*а*), зависимости $I(k_1)$ и $T(k_1)$ являются монотонно убывающими при возрастании k_1 (рис. 1.4.*б*); а при $x(T) < x(0)$, когда траектории под управлением $\{-1, +1\}$ достигают особой траектории, оптимальное значение k_1^* определяется траекторией, координата переключения которой с $U = -1$ на $U = +1$ лежит на особой траектории $x_{1oc} = 0$ (рис. 1.4.*а*, 1.4.*в*). Аналогичным образом определяется оптимальное значение параметра τ, причем характер зависимостей $I(\tau)$ и $T(\tau)$ для рассмотренных граничных условий сохраняется.

Пример 2. Для нелинейного объекта

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = \tau^{-1}(x_1 - x_1^2 - x_2),$$

требуется определить оптимальные управления $|U| \leq 1$ и параметр k_1 в задаче быстродействия и на минимум ресурсов с $I = \int_0^T x_1\, dt$.

В задаче быстродействия УОП в R_2 не выполняется при

$$\det D_2 = -k_1^2 \tau^{-1}(1 - 2x_1) = 0,$$

причем уравнение особой траектории $x_{1oc} = 0.5$ не зависит от параметров. В задаче на минимум ресурсов из УОП в R_3 определяется уравнение

$$\det D_3 = x_1 + k_1 \tau U - 0.5 = 0,$$

связывающее особые траекторию и управление, а также параметры объекта.

На рис. 1.5.а показаны траектории объекта под управлением $\{-1, +1\}$ при различных коэффициентах k_1, на рис. 1.5.б – соответствующие зависимости $I(k_1)$ и $T(k_1)$. Если при решении задачи быстродействия необходимо выбрать k_1^{*1}, при котором траектория объекта касается $x_{1oc} = 0.5$, то при решении задачи на минимум ресурсов оптимальное значение параметра получается равным k_1^{*2}, меньшим k_1^{*1}.

Таким образом, для задач быстродействия и на минимум ресурсов УОП для нелинейных объектов позволяют судить о влиянии параметров объекта на характеристики процесса перехода.

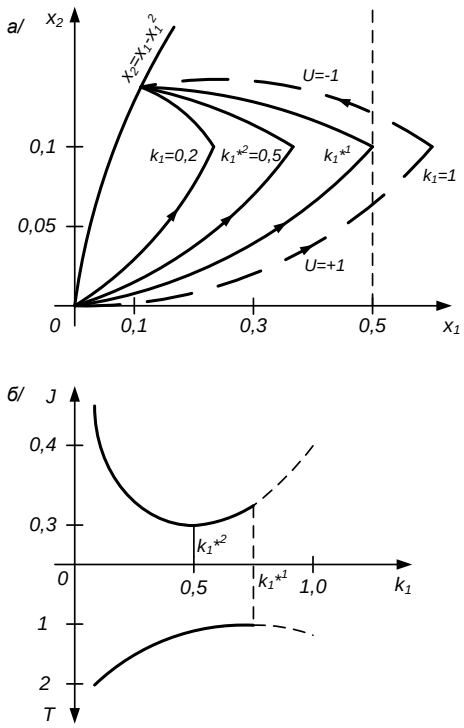

Рис. 1.5. Параметрическая оптимизация при множестве особых траекторий

1.1.4. Задачи с нелинейным управлением

Проводится качественное исследование свойств оптимального управления в задачах, нелинейных по координатам и управлению, в частности, в задаче аналитического конструирования систем управления.

Предлагается способ прямого решения таких задач в пространстве координат и параметров нелинейного объекта с помощью УОП. Затем исследуются два пути построения замкнутой системы: 1) непосредственного использования полученного из УОП многократно продифференцированного управления (МДУ) с исследованием асимптотики траекторий методом малого параметра и моделированием замкнутой системы; 2) задания вида оптимального управления в функции координат объекта и вычисления коэффициентов обратных связей.

1.1.4.1. Решение задачи с помощью УОП для нелинейных объектов

Рассматривается распространенная задача аналитического конструирования систем автоматического управления [9, 38, 50, 51, 54, 88, 91]: для объекта с дифференциальными уравнениями связей (В-1)

$$\dot{x}_i = f_i(x, U), \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

где функции $f_i(x, U)$ непрерывны и дифференцируемы по переменным x и U, требуется определить допустимое управление $U \in \Omega \subset R_1$ в функции координат объекта x, переводящее объект из начального состояния $x(0)$ в конечное состояние $x(T)$, заданных на множестве стационарных состояний $f_i(x, U = 0) = 0$, и минимизирующее квадратичный по управлению интегральный функционал (В-12)

$$I = \int_0^T (f_0(x) + \alpha U^2)\, dt,$$

в котором T – время перехода, может быть задано или не задано заранее, относительно функции $f_0(x)$ предполагается, что она непрерывна и дифференцируема по x, α – положительный весовой коэффициент. Функционал (В-12) характеризует отклонения координат объекта и расход энергии управляющего воздействия. Поставленная задача часто встречается при управлении энергетическими и электротехническими установками [40, 53, 58, 59, 65, 78, 80, 90, 103, 113].

Наиболее разработана задача (В-1, В-12) для линейных объектов, квадратичной функции $f_0(x)$ и времени перехода T, стремящегося к бесконечности. В этом случае поставленная задача классически называется задачей аналитического конструирования регуляторов [3, 8, 38, 49, 54].

Если минимум функционала отыскивается на траекториях движения линейного (В-3) $\dot{x} = Ax + BU$ или нелинейного (В-5) $\dot{x} = A(x) + B(x)U$ объекта с линейным управлением и не задано ограничение на амплитуду управления, то для решения задачи применяется классическое вариационное исчисление [1, 78, 79] или принцип максимума [8, 44, 88]. Например, для задачи (В-5, В-12) гамильтониан H запишется при $\Psi_0 = -1$

$$H = -f_0(x) - \alpha U^2 + \big(\Psi, A(x)\big) + (\Psi, B(x)U).$$

Максимум H по U, что требуется для оптимальности управления, зависит от выражения $H' = -\alpha U^2 + (\Psi, B(x)U)$. Дифференцируя H' по U и приравнивая полученное выражение нулю, находится экстремальное управление в функции вспомогательного вектора

$$U(t) = -\frac{\big(\Psi, B(x)\big)}{2\alpha}.$$

Последнее управление является оптимальным, так как вторая производная H' по U отрицательна:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial U^2} = -2\alpha < 0.$$

Если минимум функционала (В-12) отыскивается на траекториях движения объекта (В-5) и управление ограничено по амплитуде $|U| \le U_{max}$, то, как утверждается в работе [8], оптимальным является управление

$$U(t) = U_{max}\,\mathrm{sat}\left(\frac{\big(\Psi, B(x)\big)}{2\alpha}\right) =$$

$$= \begin{cases} U_{max}\,\mathrm{sign}\left(\dfrac{\big(\Psi, B(x)\big)}{2\alpha}\right), & \text{если } \left|\dfrac{\big(\Psi, B(x)\big)}{2\alpha}\right| > U_{max}, \\ \dfrac{\big(\Psi, B(x)\big)}{2\alpha}, & \text{если } \left|\dfrac{\big(\Psi, B(x)\big)}{2\alpha}\right| \le U_{max}, \end{cases}$$

где sat – функция насыщения аргумента, имеющая единичный коэффициент усиления входного сигнала в диапазоне $[-U_{max}, +U_{max}]$.

Функция sat дает вполне определенное оптимальное управление в зависимости от вспомогательного вектора Ψ, и по этой причине особых режимов в задаче с нелинейным управлением не возникает. Однако воспользоваться последним выражением для нахождения оптимального управления сложно, так как, во-первых, трудно найти, особенно в нелинейной задаче, замкнутое решение для Ψ, во-вторых, если даже решение для Ψ в функции времени будет получено, то потребуется еще процедура перехода от управления в функции времени к управлению в функции состояний объекта. Поэтому для нелинейных объектов при минимизации квадратичного критерия большинство авторов переходят к замене нелинейной задачи линейной. Например, в работах [50, 88] развита теория аналитического конструирования для нелинейных систем на основе линейного приближения нелинейных характеристик. В работе [54] исходная нелинейная система представляется в виде сходящихся степенных или равномерно сходящихся рядов. В работе [62] задача оптимального управления для нелинейного объекта трактуется как задача аппроксимации: для локальных приближений используются методы, основанные на разложении в ряд Тейлора, для глобальных приближений применяются дискретное динамическое программирование и разложение по полиномам Чебышева. При этом решение аппроксимированной задачи является необходимым условием решения исходной нелинейной задачи. Но при указанных подходах могут потеряться принципиальные качественные отличия решения нелинейной задачи от линейной.

Рассмотрим способ прямого решения поставленной задачи (В-1, В-12) в пространстве координат и параметров объекта [101, 102, 103], основанный на применении УОП для нелинейных объектов. Способ проиллюстрируем на примере решения задачи с критерием (В-12) для стационарного нелинейного объекта вида (В-5)

$$\dot{x} = A(x) + B(x)U, \qquad x \subset R_n.$$

В исходной задаче (В-5, В-12), нелинейной по управлению U, не существует особого в смысле принципа максимума режима. Для использования УОП для нелинейных объектов при решении задачи (В-5, В-12) производится приведение исходной задачи к редуцированной задаче с линейным вхождением управления, в которой возможно существование особого режима.

Редуцированный объект получается из исходного (В-5) путем введения на входе последнего линейного звена – интегратора для упрощения обратного перехода – с уравнением

$$\dot{x}^0 = y,$$

где y – входное воздействие редуцированного объекта;

x^0 – выходной сигнал интегратора, являющийся управлением для исходного объекта, т. е. $x^0 = U$.

Уравнения редуцированного объекта в матричной форме запишутся в пространстве R_{n+1}

$$\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x}) + B(\tilde{x})y, \tag{1-34}$$

где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x \end{pmatrix} \subset R_{n+1}, \qquad A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ A(x) \end{pmatrix}, \qquad B(\tilde{x}) = \left(1 \underbrace{0\,0 \ldots 0}_{n \text{ нулей}}\right).$$

Графически переход от исходного объекта к редуцированному поясняет рис 1.6.

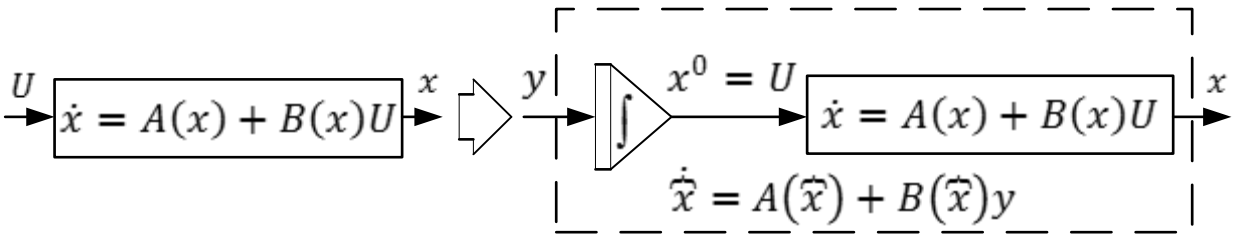

Рис. 1.6. Приведение исходного объекта к редуцированному

Для редуцированного объекта используется эквивалентный исходному (В-12) функционал на минимум ресурсов координат $\tilde{x}$ редуцированного объекта

$$I = \int_0^T (f_0(x) + \alpha(x^0)^2)\, dt. \tag{1-35}$$

В редуцированной задаче (1-34, 1-35) в отличие от исходной (В-5, В-12) возможно существование особого режима, так как редуцированный объект нелинеен по координатам $\tilde{x}$ и линеен по управле-

нию y, а функционал нелинеен по координате x^0. К редуцированной задаче (1-34, 1-35) применяются УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат R_{n+2}, которое получается добавлением к координатам $\tilde{x} \subset R_{n+1}$ дополнительной координаты x_0, учитывающей функционал (1-35) по уравнению $\dot{x}_0 = f_0(x) + \alpha(x^0)^2$, т. е. УОП применяются к системе

$$\dot{\hat{x}} = A(\hat{x}) + B(\hat{x})y, \tag{1-36}$$

где

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \subset R_{n+2}, \qquad A(\hat{x}) = \begin{pmatrix} f_0(x) + \alpha(x^0)^2 \\ A(\tilde{x}) \end{pmatrix}, \qquad B(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(\tilde{x}) \end{pmatrix}.$$

Особый режим в редуцированной задаче (1-36) возникает, если

$$\left(\hat{\Psi}, B(\hat{x})\right) \equiv 0, \qquad \frac{d^p\left(\hat{\Psi}, B(\hat{x})\right)}{dt^p} \equiv 0, \qquad p = 1, 2, \dots,$$

что равносильно условию $D_{n+2}^T \hat{\Psi} = 0$ или $\det D_{n+2} = 0$, если матрица D_{n+2} образована из векторов B_j, $j = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2$, вычисленных по рекуррентному соотношению, аналогичному (1-9)

$$\begin{gathered} B_j(\hat{x}, y, \dot{y}, \dots) = \frac{\partial B_{j-1}}{\partial y^{(j-4)}} \frac{d^{(j-3)}y}{dt^{(j-3)}} + \\ + \frac{\partial B_{j-1}}{\partial \hat{x}}(A(\hat{x}) + B(\hat{x})y) - \left(\frac{\partial A(\hat{x})}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial B(\hat{x})y}{\partial \hat{x}}\right) B_{j-1}, \\ B_1(\hat{x}) = B(\hat{x}). \end{gathered} \tag{1-37}$$

Первое слагаемое в (1-37) получено из предположения, что особое управление y в редуцированной задаче является непрерывно-дифференцируемой функцией времени. Из выражения для детерминанта матрицы $D_{n+2} = (B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_n \quad B_{n+1} \quad B_{n+2})$ в общем случае получается множество особых управлений y и его производных по времени в функции координат редуцированного объекта $\tilde{x}$

$$\det D_{n+2} = F_0(x, x^0, y, \dot{y}, \dots) = 0. \tag{1-38}$$

Последнее уравнение учитывает особое оптимальное управление для редуцированного объекта. Оптимальность особого управления из (1-38) проверяется по необходимым условиям типа Келли [39]

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial y}\right) \geq 0$$

к редуцированной задаче

$$\begin{cases} \dot{x}^0 = y, \\ \dot{x} = A(x) + B(x)x^0, \\ I = \int\limits_0^T (f_0(x) + \alpha(x^0)^2)\, dt, \end{cases}$$

для которой

$$H = -f_0(x) - \alpha(x^0)^2 + \Psi^0 y + \big(\Psi, A(x)\big) + (\Psi, B(x)x^0),$$
$$\frac{\partial H}{\partial y} = \Psi^0, \qquad \frac{d\Psi^0}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^0} = 2\alpha x^0 - \big(\Psi, B(x)\big).$$

Тогда по условию Келли

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^2}{dt^2}\Psi^0\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d}{dt}\Big(2\alpha x^0 - \big(\Psi, B(x)\big)\Big)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(2\alpha\dot{x}^0 - \frac{d}{dt}\big(\Psi, B(x)\big)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2\alpha y) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{d}{dt}\big(\Psi, B(x)\big).$$

Так как второе слагаемое не зависит от y и равно нулю, то условие Келли выполняется при неотрицательном весовом коэффициенте $\alpha \geq 0$.

Уравнение (1-38) учитывает также оптимальные особые режимы для исходного объекта, так как по определению редуцированный объект состоит из последовательного соединения интегратора и исходного объекта. Применение УОП для задачи, состоящей из интегратора и функционала $I = \int_0^T \alpha(x^0)^2\, dt$, показывает, что особой траекторией в ней является линия $x^0 = 0$, реализуемая особым уравнением $y = 0$. Если эти тривиальные решения не обращают в тождество

уравнение (1-38), то уравнение (1-38) справедливо для особых траекторий и управлений исходного объекта.

Таким образом, уравнение (1-38) содержит оптимальные особые траектории и управления исходного объекта. Тогда искомое оптимальное управление в исходной задаче (В-5, В-12) можно получить, если в уравнении (1-38) произвести обратную замену переменных управления в редуцированной задаче на переменные управления в исходной задаче

$$x^0 = U, \qquad \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} y = \frac{d^k}{dt^k} U, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1-39}$$

в результате получается оптимальное управление в функции координат исходного нелинейного объекта

$$F\left(x, U, \dot{U}, \ddot{U}, \ldots\right) = 0. \tag{1-40}$$

Описанный способ прямого решения задачи аналитического конструирования может быть также эффективно использован для объектов, нелинейных по координатам и по управлению, и нестационарных объектов при произвольном задании функционала в соответствующей проверке оптимальности особого управления в редуцированной задаче и вычислении нестационарных рекуррентных соотношений при проверке УОП.

Проиллюстрируем процедуру использования данного способа.

Пример 1. Требуется определить оптимальное управление для линейного объекта [54]

$$\dot{x}_1 = U - x_1, \qquad \dot{x}_2 = x_1,$$

с квадратичным критерием $I = \int_0^T U^2\, dt$, T не задано.

Редуцированная задача в пространстве $R_{n+2} = R_4$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = (x^0)^2, \\ \dot{x}^0 = y, \\ \dot{x}_1 = x^0 - x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases}$$

При проверке УОП в $R_{n+2} = R_4$ вычисляются векторы B_1, B_2, B_3, B_4 по соотношению (1-38), из которых образуется матрица

$$D_4 = (B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4) = \begin{pmatrix} 0 & -2x^0 & -2y & -2\dot{y} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая $\det D_4$ нулю, определяется особое оптимальное управление в редуцированной задаче

$$\det D_4 = 2(y - \dot{y}) = 0.$$

Производя обратную замену управлений $y = \dot{U}$, $\dot{y} = \ddot{U}$, из решения уравнения $\dot{U} - \ddot{U} = 0$ вычисляется оптимальное управление для исходного объекта в функции времени $U(t) = C_1 e^t + C_2$, совпадающее с найденным в [54]. Отметим, что полученное оптимальное управление не зависит от координат. В общем случае для линейных объектов с квадратичным по x и U критерием с помощью способа решения на основе УОП можно показать, что оптимальное управление зависит только от тех координат, которые входят в критерий [102].

Пример 2. Рассмотрим решение задачи аналитического конструирования для нелинейного объекта [75]

$$\dot{x}_1 = U, \qquad \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2,$$

с квадратичным критерием $I = \int_0^T (x_1^2 + U^2)\, dt$, T не задано. Редуцированная задача с линейным управлением y представляет собой систему трех уравнений связи и интегрального функционала от координат этой системы

$$\begin{cases} \dot{x}^0 = y, \\ \dot{x}_1 = x^0, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2, \\ I = \displaystyle\int_0^T (x_1^2 + (x^0)^2)\, dt. \end{cases}$$

Применяя УОП для редуцированной задачи в $R_{n+2} = R_4$, вычисляются векторы B_1, B_2, B_3, B_4 по рекуррентному соотношению (3.7), из которых составляется матрица

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2x^0 & -2y + 2x_1 & -2\dot{y} + 2x^0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_1 & 2x^0 + 2x_1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая детерминант матрицы D_4 нулю, определяется множество особых решений в редуцированной задаче

$$\dot{y}x_1 - y(x^0 + x_1) + x_1^2 = 0,$$

которое оптимально для всех $\{x, y\}$, что следует из условий Келли.

Производя обратную замену переменных редуцированной задачи на переменные исходной задачи $x^0 = U$, $y = \dot{U}$, $\dot{y} = \ddot{U}$, записывается уравнение оптимального управления в исходной задаче $\ddot{U}x_1 - \dot{U}(U + x_1) + x_1^2 = 0$.

Пример 3. Для нелинейного по управлению объекта $\dot{x} = U - U^2 - x$ требуется найти управление, доставляющее минимум функционалу $I = \int_0^T U\,dt$.

Переходя к редуцированной задаче

$$\dot{x}^0 = y,$$
$$\dot{x}_1 = x^0 - (x^0)^2 - x_1,$$
$$I = \int_0^T x^0\,dt,$$

из УОП в $R_{n+2} = R_3$ определим в ней особое управление $y = 0.5 - x_0$. Условие Келли

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d}{dt}(1 - \Psi_1 + 2x^0\Psi_1)\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\dot{\Psi}_1 - 2y\dot{\Psi}_1 + 2x^0\right) = 2\Psi_1 \geq 0$$

с учетом условий особого режима $\Psi^0 = \dot{\Psi}^0 = 0$, из которых $\Psi_1 = (1 - 2x^0)^{-1}$ определяет область оптимальности особого управления в редуцированной задаче $x^0 < 0.5$.

Управление в исходной задаче после замены $x^0 = U, y = \dot{U}$ равно

$$\dot{U} = 0.5 - U,$$

причем оно оптимально только при $U < 0.5$.

Полученные в примерах решения можно получить и с помощью классического вариационного исчисления или принципа максимума. Основное достоинство предлагаемого способа заключается в формализованности процедуры решения без анализа множителей Лагранжа или вспомогательных переменных.

Далее после получения точного решения задачи оптимизации (В-5, В-12) в виде многократно продифференцированного управления (1-40) возникает проблема построения оптимальной замкнутой системы, для чего исследуем два пути:

1) непосредственного использования многократно продифференцированного управления для замыкания системы;

2) задания вида управления в функции координат и вычисление коэффициентов обратных связей.

1.1.4.2. Исследование замкнутой системы с многократно продифференцированным управлением

Идея применения многократно продифференцированного управления (МДУ) в задаче синтеза управления предложена А. М. Летовым [54], но редко используется. Однако, как показано в работе [55], применение для линейного объекта линейной обратной связи по состоянию вида $\dot{U} = k_1 x + k_2 U$ вместо обычной $U = kx$ (последняя в [54] считается идеальной) позволяет значительно улучшить качественные показатели работы системы, система становится более точной и менее чувствительной к возмущениям параметров. Далее, в работе [129] утверждается, что закон управления, основанный на МДУ, обеспечивает произвольную динамику замкнутой системы. Но вычислительные трудности при этом могут быть значительными [128], и, что иногда более важно, теряется интуитивное понимание полученного решения задачи.

1.1.4.2.1. Анализ асимптотики оптимальных траекторий

Общие свойства МДУ, вычисленного с помощью УОП для нелинейных объектов, определим на основе решения задачи для объекта второго порядка общего вида

$$\dot{x}_1 = k_1 U + f_1(x_1), \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \tag{1-41}$$

с критерием

$$I = \int_0^T (C_1 p_1(x_1) + C_2 p_2(x_2) + C_3 U^2)\, dt,$$

T не задано, для которой редуцированная задача в пространстве $R_{n+2} = R_4$ запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = C_1 p_1(x_1) + C_2 p_2(x_2) + C_3 (x^0)^2, \\ \dot{x}^0 = y, \\ \dot{x}_1 = k_1 x^0 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases}$$

При проверке УОП для последней задачи в $R_{n+2} = R_4$ с вычислением векторов B_1, B_2, B_3, B_4 по соотношению (1-37) из определителя матрицы $D_4 = (B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4)$ получим выражение для особого управления в редуцированной задаче y и его производной $\dot{y}$ в функции координат x^0, x_1, x_2

$$\begin{gathered} \det D_4 = -2C_3 \dot{y} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \\ +2C_3 y \left[\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} (k_1 x^0 + f_1) + f_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} - f_1' \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] + \\ +2C_3 x^0 \left[f_1' f_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\ \left. +(k_1 x^0 + f_1) \left(f_1' \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - f_1'' \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right) - f_1' \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right] + \\ +k_1 C_1 (k_1 x^0 + f_1) \left(p_1'' \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - p_1' \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} \right) - k_1 C_2 p_2' \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)^2 + \end{gathered} \tag{1-42}$$

$$+k_1C_1p_1'\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}-f_2\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}\right).$$

После замены управлений $x^0=U$, $y=\dot{U}$, $\dot{y}=\ddot{U}$ запишем уравнение для МДУ в исходной задаче в таком виде:

$$-2C_3\ddot{U}F_1(x)+2C_3\dot{U}F_2(x,U)+2C_3UF_3(x,U)+F_4(x,U)=0. \qquad (1\text{-}43)$$

Найти точное аналитическое решение для траекторий объекта (1-41) с управлением (1-43) не представляется возможным, поэтому проведем приближенное исследование системы (1-41, 1-43). Для выбора метода исследования проанализируем функциональные зависимости F_1, F_2, F_3, F_4 в уравнении МДУ (1-43).

Покажем, что функции F_1, F_2, F_3, являющиеся сомножителями перед управлением и его производными, характеризуют особый режим в задаче быстродействия для объекта (1-41), причем $F_1(x)=0$ – особая траектория, а $F_2(x,U)$ и $F_3(x,U)$ – особые управления задачи быстродействия. Для этого проверим выполнение УОП для объекта (1-41) в $R_n=R_2$, с вычислением векторов B_1 и B_2 по соотношению (1-5):

$$B_1=\begin{pmatrix}k_1\\0\end{pmatrix},\qquad B_2=\begin{pmatrix}-k_1f_1'\\-k_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\end{pmatrix}.$$

УОП в R_2 не выполняются на особой траектории, полученной из $\det D_2=\det(B_1\quad B_2)=0$, что дает $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0=F_1(x)$.

Для нахождения особого управления, реализующего $F_1(x)=0$, по соотношению (1-5) вычислим дополнительный вектор

$$B_3=\begin{pmatrix}k_1(f_1)^2-k_1f_1''(k_1U+f_1)\\ k_1f_1'\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}+k_1\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}-k_1(k_1U+f_1)\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}-k_1f_2\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}\end{pmatrix}.$$

Особое управление в задаче быстродействия определится из детерминантов матриц $D_2^1=(B_1\quad B_2)$ и $D_2^2=(B_2\quad B_3)$, причем выражения для $\det D_2^1$ и $\det D_2^2$ будут соответственно равны $F_2(x,U)$ и $F_3(x,U)$. Разные функциональные зависимости для особого управления можно считать положительным фактором для реализации особо-

го управления. На конкретных примерах можно показать, что особые управления, полученные из $F_2(x,U)=0$ и $F_3(x,U)=0$, на особой траектории $F_1(x)=0$ совпадают, однако в общем виде показать это не удается. Отметим также, что уравнение $F_4(x,U)=0$ характеризует особый режим для объекта (1-41) в задаче на минимум ресурсов координат x_1 и x_2.

Из полученных результатов о функциональных зависимостях F_1, F_2, F_3, F_4 следует, что свойства оптимального управления в исходной задаче будут зависеть от выполнения УОП для данного объекта (1-41) в задаче быстродействия и на минимум ресурсов координат. Заметим, что при значениях координат объекта вблизи особой траектории задачи быстродействия $F_1(x)=0$ с особыми управлениями в этой же задаче из $F_2(x,U)=F_3(x,U)=0$ величина оптимального управления и его производных по времени в исходной задаче из (1-43) неограниченно возрастает. Это обстоятельство служит предпосылкой применения для приближенного качественного исследования решений системы уравнений объекта (1-41) с оптимальным управлением (1-43) методов построения асимптотических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных [66, 94].

При использовании метода малого параметра исходная система дифференциальных уравнений, которая называется невырожденной, разбивается на систему медленных движений со скоростями, характеризующими дифференциальные уравнения без малого параметра, и систему быстрых движений со скоростью, перед которой имеется малый параметр. Невырожденной системе ставится в соответствие вырожденная система, которая получается из первой, если положить малый параметр равным нулю. Например, невырожденной системе (1-41, 1-43) с малым параметром $F_1(x)=0$, учитывающим особую траекторию задачи быстродействия, можно поставить в соответствие вырожденную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 U + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \\ 2C_3 \dot{U} F_2(x,U) + 2C_3 U F_3(x,U) + F_4(x,U) = 0. \end{cases} \tag{1-44}$$

Для вырожденной системы не существует решения с произвольной начальной точкой x_{10}, x_{20}, U_0, $\dot{U}_0$, а речь может идти о близости

решений невырожденной и вырожденной систем только для тех решений невырожденной системы, начальные точки которых лежат в малой (вместе с $F_1(x)$) окрестности поверхности

$$2C_3\dot{U}F_2(x,U) + 2C_3UF_3(x,U) + F_4(x,U) = 0.$$

Применяя далее метод малого параметра к системе (1-44), в которой малым параметром перед производной $\dot{U}$ является сомножитель $F_2(x,U)$, определяющий особое управление в задаче быстродействия, запишем вырожденную систему для (1-44)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1U + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2), \\ 2C_3UF_3(x,U) + F_4(x,U) = 0. \end{cases} \tag{1-45}$$

Медленные движения под оптимальным управлением возможны только в окрестности такой точки, лежащей на особой траектории $F_1(x) = 0$, вблизи которой становятся сравнимыми величины малого параметра $F_2(x,U)$ и алгебраического уравнения из системы (1-45), т. е. при условиях

$$\begin{gathered} F_1(x) = 0, \qquad F_2(x,U) = 0, \\ 2C_3UF_3(x,U) + F_4(x,U) = 0. \end{gathered} \tag{1-46}$$

Как было отмечено, на особой траектории $F_1(x) = 0$ выражения для особых управлений задачи быстродействия $F_2(x,U) = 0$ и $F_3(x,U) = 0$ равны, т. е. $F_2(x,U) = F_3(x,U) = 0$, тогда последние условия (1-46) для нахождения точки, вблизи которой возможны медленные движения, примут вид

$$\begin{gathered} F_1(x) = 0, \qquad F_2(x,U) = 0, \\ F_3(x,U) = 0, \qquad F_4(x,U) = 0. \end{gathered} \tag{1-47}$$

Из приведенных рассуждений следует, что медленные движения в исходной задаче возможны, если в задаче быстродействия есть особая траектория под особым управлением задач быстродействия или на минимум ресурсов координат. Характер медленных движений под особым управлением можно определить с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений [12, 116]. Для управляемых линейных объектов последовательной структуры, когда

$F_1(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \text{const} \neq 0$ и особого решения в задаче быстродействия не существует, то не существует и медленных движений в задаче минимизации квадратичного по управлению критерия, а оптимальные траектории в последней задаче неустойчивы. Особая траектория в задаче быстродействия $F_1(x) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0$ возникает при управлении нелинейными объектами, поэтому только для нелинейных объектов с особой траекторией задачи быстродействия под особым управлением задач быстродействия или на минимум ресурсов координат оптимальные траектории в задаче минимизации квадратичного по управлению критерия могут быть устойчивы.

Последнее свойство используем для стабилизации объекта на полубесконечном интервале времени. Если для нелинейного объекта вида, например, (1-41), получено, что в результате исследования асимптотики оптимальных траекторий с управлением (1-43) устойчивые медленные движения возникают в окрестности точки под действием особого управления $U_{oc}(x)$, вычисленного из условий (1-47), то для построения устойчивой замкнутой системы с произвольным конечным состоянием $x(T) = x_k$, принадлежащим множеству стационарных состояний, можно воспользоваться двумя путями: 1) построение системы сравнения, 2) введение добавки управления.

По первому пути для построения системы сравнения примем, что исходная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 U_{oc}(x) + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \\ \dot{x}(x_l) = 0, \end{cases} \tag{1-48}$$

с устойчивым состоянием равновесия x_l описывает траектории движения объекта в системе координат X, смещенной относительно исходной системы координат x на вектор $(x_k - x_l)$, при этом системы координат X и x связаны формулой преобразования [48]

$$X = x - x_k + x_l. \tag{1-49}$$

С учетом переноса (1-49) система (1-48) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 U_{oc}(x - x_k + x_l) + f_1(x_1 - x_{1k} + x_{1l}), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1-50}$$

Следует иметь в виду, что составляющая $f_1(x_1)$ характеризует внутреннюю обратную связь объекта управления и не может быть изменена, а составляющие $f_1\,(x_k, x_l)$ войдут во внешнюю обратную связь для коррекции особого управления.

Состоянием равновесия системы сравнения (1-50) будет точка x_k. Управление $U_{oc}(x, x_k, x_l)$, обеспечивающее устойчивость состоянию равновесия x_k, определится из решения уравнения

$$\begin{gathered} k_1 U_{oc}(x, x_k, x_l) + f_1(x_1) = \\ = k_1 U_{oc}(x - x_k + x_l) + f_1(x_1 - x_{1k} + x_{1l}). \end{gathered} \tag{1-51}$$

По второму пути к управлению $U_{oc}(x)$ в системе (1-48) вводится добавка управления $W(x_k)$, зависящая от координат конечной точки, чтобы состоянием равновесия объекта с управлением $\big(U_{oc}(x) + W(x_k)\big)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1\big(U_{oc}(x) + W(x_k)\big) + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

было требуемое конечное состояние x_k. Тогда добавка $W(x_k)$ определится из условия

$$\dot{x}_1(x_k) = 0 = k_1\big(U_{oc}(x_k) + W(x_k)\big) + f_1(x_{1k}). \tag{1-52}$$

Отметим, что при использовании данных способов ввиду нелинейности объекта и особого управления необходима проверка характера состояния равновесия, совпадающего с конечной точкой x_k, например, с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Проиллюстрируем полученные результаты.

Пример. Проведем анализ асимптотики оптимальных траекторий для электродвигателя постоянного тока, управляемого со стороны возбуждения, при уравнениях движения [113]

$$\dot{x}_1 = k_1 U - a_{11} x_1, \qquad \dot{x}_2 = a_{21} x_1 - a_{22} x_1^2 x_2 - m, \tag{1-53}$$

где управление U – напряжение на входе усилителя мощности, координаты x_1 и x_2 – соответственно ток обмотки возбуждения и угловая скорость двигателя, параметры k_1, a_{11}, a_{21}, a_{22}, m положительны, в задаче минимизации расхода энергии управляющего воздействия и в цепи обмотки возбуждения с критерием

$$I = \int_0^T (x_1^2 + U^2)\, dt,$$

T не задано.

Множеством стационарных состояний объекта (1-53) является экстремальная кривая

$$x_2 = \frac{a_{21}x_1 - m}{a_{22}x_1^2}$$

с экстремумом в точке

$$x_э = \left(\frac{2m}{a_{21}}, \frac{a_{21}^2}{4a_{22}m}\right). \qquad (1\text{-}54)$$

Применяя для поставленной задачи способ прямого решения на основе УОП в $R_{n+2} = R_4$, запишем оптимальное управление в виде

$$-\ddot{U}F_1(x) + \dot{U}F_2(x,U) + UF_3(x,U) + F_4(x,U) = 0,$$

где функциональные зависимости F_1, F_2, F_3, F_4 характеризуют (и равны): F_1 – особую траекторию в задаче быстродействия

$$F_1(x) = a_{21} - 2a_{22}x_1x_2;$$

$F_2(x,U)$, $F_3(x,U)$ – особые управления в задаче быстродействия

$$F_2(x,U) = -2a_{22}k_1x_2U - a_{21}a_{22}x_1^2 + 2a_{22}mx_1 + a_{11}a_{21},$$
$$F_3(x,U) = 2a_{11}a_{22}k_1x_2U - 2a_{11}^2a_{22}x_1x_2 +$$
$$+a_{11}a_{21}a_{22}x_1^2 - 2a_{11}a_{22}mx_1;$$

$F_4(x,U)$ – особое управление в задаче на минимум расхода координаты x_1 с критерием $I = \int_0^T x_1^2\, dt$

$$F_4(x,U) = a_{21}k_1^2U + a_{21}a_{22}k_1x_1^3 - a_{11}a_{21}k_1x_1 - 2a_{22}k_1mx_1^2.$$

Функции F_1, F_2 являются малыми параметрами перед производными управления по времени $\ddot{U}$ и $\dot{U}$. При координатах объекта, лежащих на особой траектории из $F_1(x) = 0$, из уравнений $F_2 = F_3 = F_4 = 0$ определяется одно и то же особое управление

$$U_{oc}(x) = \frac{a_{11}a_{21}x_1 + 2a_{22}mx_1^2 - a_{21}a_{22}x_1^3}{a_{21}k_1}. \qquad (1\text{-}55)$$

При условиях (1-47) в уравнениях для производных управления по времени получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, и в этом случае в системе возможны медленные движения под особым управлением (1-45) с уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 U_{oc}(x) - a_{11}x_1 = \dfrac{2a_{22}mx_1^2 - a_{21}a_{22}x_1^3}{a_{21}} = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}x_1^2 x_2 - m = Q(x_1, x_2). \end{cases} \qquad (1\text{-}56)$$

Положением равновесия системы (1-56) служит точка экстремума $x_э$ статической характеристики (1-54). Для определения ее характера, следуя [12], вычислим величины

$$\Delta(x_э) = \begin{vmatrix} P'_{x_1}(x_э) & P'_{x_2}(x_э) \\ Q'_{x_1}(x_э) & Q'_{x_2}(x_э) \end{vmatrix} = 16\frac{a_{22}^2 m^4}{a_{21}^4},$$

$$\sigma(x_э) = P'_{x_1}(x_э) + Q'_{x_2}(x_э) = -8\frac{a_{22}m^2}{a_{21}^2}.$$

Из характеристического уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$ найдем характеристические корни

$$\lambda_{1,2} = -4\frac{a_{22}m^2}{a_{21}^2} < 0,$$

из отрицательных значений которых и неопределенных коэффициентов направлений траекторий

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - P'_{x_1}(x_э)}{P'_{x_2}(x_э)} = \frac{0}{0}, \qquad k_2 = \frac{\lambda_2 - P'_{x_1}(x_э)}{P'_{x_2}(x_э)} = \frac{0}{0},$$

заключаем, что положение равновесия $x_э$ системы медленных движений (1-56) является устойчивым дикритическим узлом. Траектории медленных движений показаны на рис. 1.7.

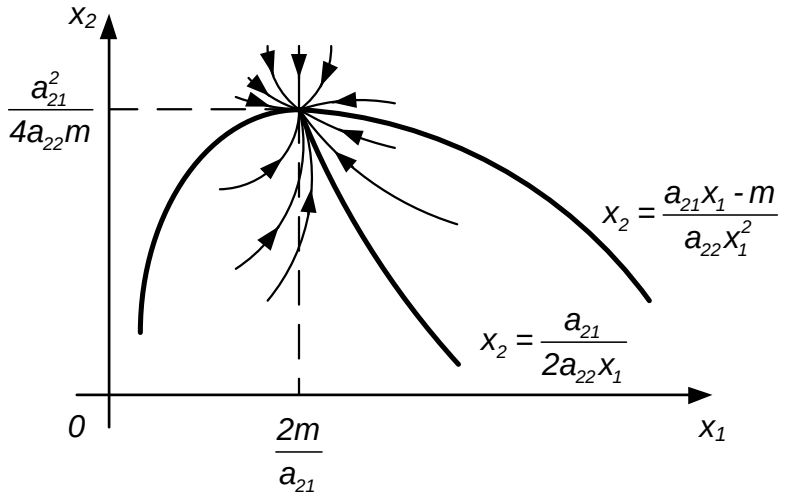

Рис. 1.7. Траектории медленных движений под особым управлением

Положение равновесия объекта (1-53), замкнутого особым управлением (1-55), являющееся точкой экстремума статической характеристики $x_э$ и принадлежащее особой траектории задачи быстродействия, асимптотически устойчиво. Используя это свойство, рассмотрим построение замкнутых систем с устойчивостью в произвольной точке x_k, принадлежащей множеству стационарных состояний, с применением системы сравнения (1-50) и введения добавки управления (1-52).

Система сравнения из (1-56) с учетом переноса (1-49) $X = x - x_k + x_э$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{2a_{22}m(x_1 - x_{1k} + x_{1э})^2 - a_{21}a_{22}(x_1 - x_{1k} + x_{1э})^3}{a_{21}}, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}x_1^2x_2 - m, \end{cases}$$

для которой состоянием равновесия служит точка $x_k = (x_{1k}, x_{2k})$, так как в системе сравнения $\dot{x}_1(x_{1k}) = \dot{x}_2(x_{1k}, x_{2k}) = 0$. Для нахождения управления $U_{oc}(x, x_k, x_э)$, обеспечивающего устойчивость конечной точке, приравниваем первые уравнения из последней системы и системы (1-56), откуда

$$U_{oc}(x, x_k, x_э) = \\ = \frac{2a_{22}m(x_1 - x_{1k} + x_{1э})^2 - a_{21}a_{22}(x_1 - x_{1k} + x_{1э})^3 + a_{11}a_{21}x_1}{a_{21}k_1}.$$

При введении добавки управления $W(x_k)$, учитывающего конечное состояние x_k, строится система стабилизации

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1\big(U_{oc}(x) + W(x_k)\big) - a_{11}x_1 = \\ = k_1\left(\dfrac{a_{11}a_{21}x_1 + 2a_{22}mx_1^2 - a_{21}a_{22}x_1^3}{a_{21}k_1} + W(x_k)\right) - a_{11}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 - a_{22}x_1^2x_2 - m, \end{cases}$$

из которой находится $W(x_k)$, такое, чтобы $\dot{x}_1(x_{1k}) = 0$, тогда

$$W(x_k) = \frac{2a_{22}mx_{1k}^2 - a_{21}a_{22}x_{1k}^3}{k_1}.$$

1.1.4.2.2. Моделирование замкнутой системы с МДУ

Решить аналитически систему дифференциальных уравнений объекта с МДУ практически невозможно, поэтому прибегают к решению задачи синтеза на вычислительных машинах [51, 54, 62].

Пусть для объекта второго порядка общего вида (1-41) получено МДУ вида (1-43). Для записи уравнения МДУ в нормальной форме примем, что состояния МДУ характеризуются вектором $z = (z_1, z_2)$, в котором переменная z_1 соответствует управлению U, а переменная z_2 – производной $\dot{U}$, причем $\dot{z}_1 = z_2$. Если на управление накладывается ограничение по модулю, то, чтобы связать ограниченное управление U с вектором z, введем функцию насыщения

$$U = \mathrm{sat}(z_1) = \begin{cases} z_1, & |z_1| \le 1, \\ \mathrm{sign}(z_1), & |z_1| > 1. \end{cases}$$

В результате введенных обозначений система дифференциальных уравнений объекта (1-41) с МДУ (1-43) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1U + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \\ U = \mathrm{sat}(z_1), \\ \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \dfrac{2C_3z_2F_2(x, z_1) + 2C_3z_1F_3(x, z_1) + F_4(x, z_1)}{2C_3F_1(x)}, \end{cases} \tag{1-57}$$

в котором последние три уравнения характеризуют состояния оптимального регулятора, который должен обеспечивать переход объекта из начального состояния в конечное с минимумом заданного критерия. Для выполнения заданных граничных условий на вход регулятора перехода введем сигнал r, а также сигналы начальных условий для переменных регулятора z_{10}, z_{20}. Тогда структура замкнутой системы, содержащей объект и регулятор, реализующий МДУ, будет соответствовать показанной на рис. 1.8.

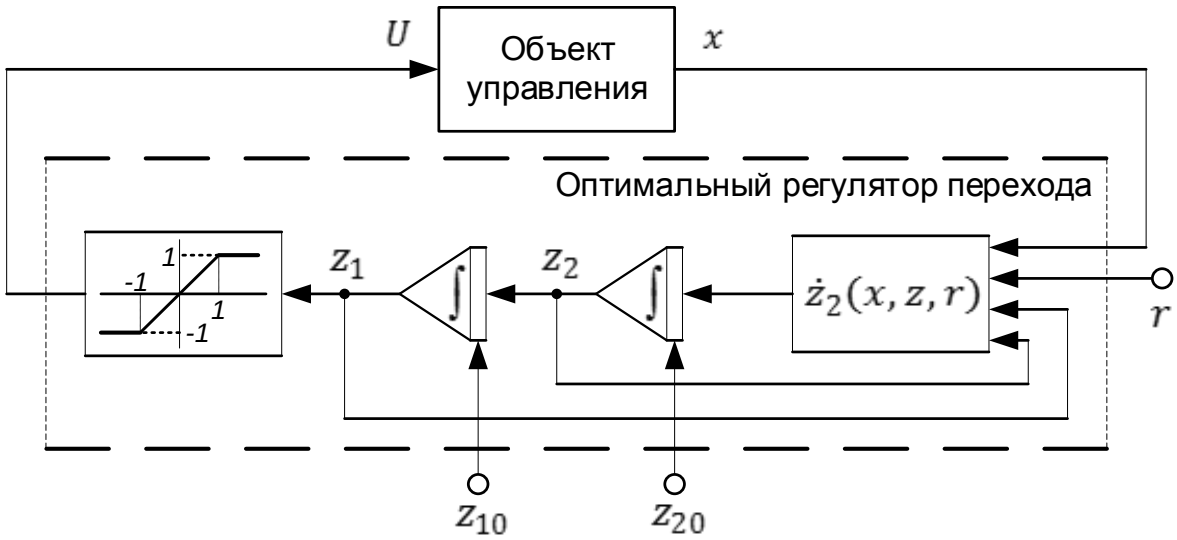

Рис. 1.8. Структура замкнутой системы с МДУ

Покажем процедуру моделирования и его результаты на конкретной задаче, рассмотренной в примере 2 п. 1.1.4.1, где для объекта $\dot{x}_1 = U$, $\dot{x}_2 = x_1^2 - x_2$ и критерия $I = \int_0^T (x_1^2 + U^2)\, dt$ с помощью УОП в $R_{n+2} = R_4$ получено МДУ $\ddot{U}x_1 - \dot{U}(U + x_1) + x_1^2 = 0$.

С учётом ограниченного управления $|U| \leq 1$ система дифференциальных уравнений объекта с МДУ в нормальной форме (1-57) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = U, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2, \\ U = \mathrm{sat}(z_1), \\ \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{z}_2 = \dfrac{z_2(z_1 + x_1) - x_1^2}{x_1}. \end{cases} \tag{1-58}$$

На рис. 1.9 показана схема моделирования для системы (1-58), а на рис. 1.10 показаны траектории системы для граничных условий $x(T) > x(0)$ при начальных условиях $x_{10} = x_{20} = z_{10} = z_{20} = 0$ и различных входных сигналах $r > 0$. Вид полученных траекторий близок к виду траекторий, получаемых при релейном управлении, но здесь структура системы не содержит релейных элементов. При обратном переходе $x(T) < x(0)$ траектории объекта асимптотически стремятся к особой траектории задачи быстродействия $x_1 = 0$, вблизи которой возникают быстрые движения. На основе исследования методом малого параметра системы (1-58) получим, что устойчивые медленные движения возникают при особом управлении $U = -x_1$ с состоянием равновесия (0,0), принадлежащим особой траектории задачи быстродействия $x_1 = 0$ и имеющим характер устойчивого узла.

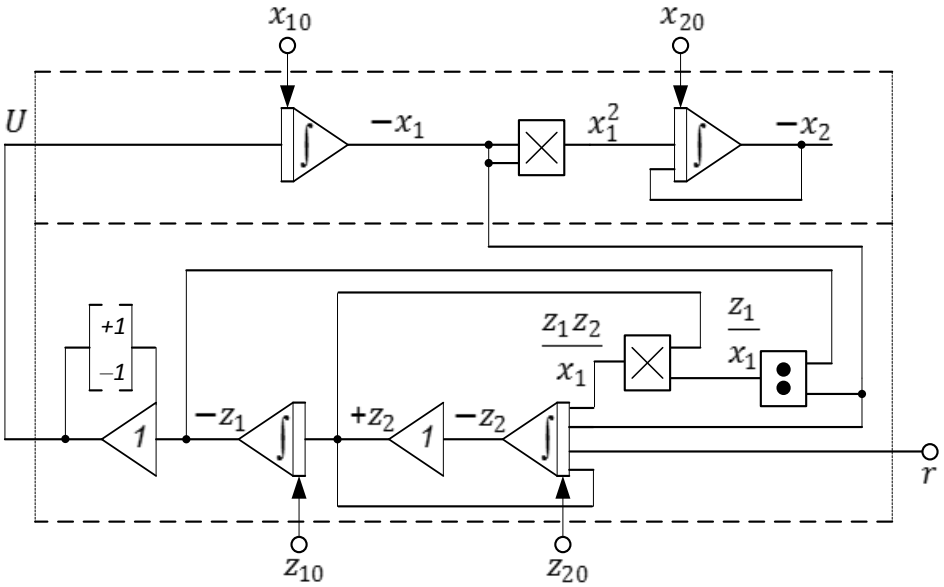

Рис. 1.9. Схема для моделирования системы с МДУ

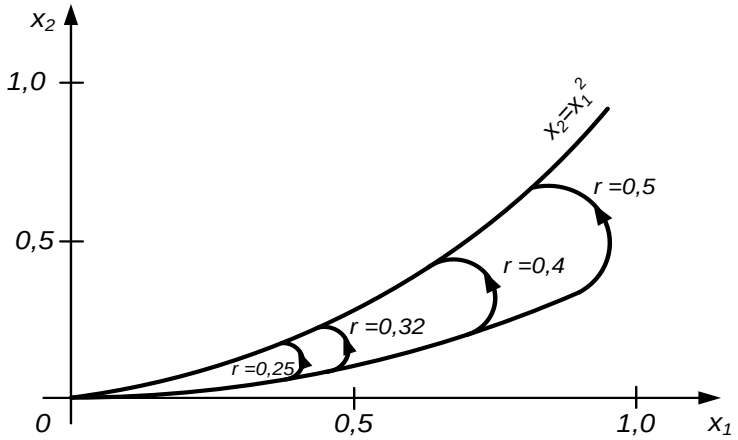

Рис. 1.10. Траектория объекта с МДУ

1.1.4.3. Построение замкнутой системы при задании вида управления

Другим путем использования МДУ для построения оптимальной замкнутой системы является задание вида управления в функции координат с последующим вычислением коэффициентов обратной связи, как это делается при синтезе оптимальных регуляторов для линейных объектов с помощью принципа максимума или динамического программирования, когда решение определяется из матричного уравнения Риккати [8].

В общем случае уравнение регулятора $U(x)$ может быть задано нелинейным по координатам, но наиболее часто $U(x)$ задается в виде линейной комбинации координат объекта

$$U(x) = (\Theta, x), \tag{1-59}$$

где $\Theta = (\Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \dots \quad \Theta_n)$ – вектор-строка коэффициентов обратной связи, $x = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$ – вектор-столбец координат объекта.

Если в оптимальной задаче с нелинейным управлением для объекта

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, U), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1-60}$$

с помощью УОП в R_{n+2} получено МДУ

$$F\left(x, U, \dot{U}, \dots\right) = 0, \tag{1-61}$$

то подстановка уравнения регулятора $U(x)$ (1-59) и соответствующих производных управления по времени с учетом уравнений объекта (1-60)

$$\frac{d^k U}{dt^k} = \frac{\partial\left(\frac{d^{k-1}U}{dt^{k-1}}\right)}{\partial x}\frac{dx}{dt}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1-62}$$

в уравнение МДУ (1-61) позволяет получить алгебраическое уравнение относительно коэффициентов обратной связи Θ и координат x

$$\varphi(\Theta, x) = 0. \tag{1-63}$$

Для вычисления коэффициентов обратной связи Θ строится система алгебраических уравнений, зависящих от Θ, являющихся сомножителями перед координатами x, так как уравнение (1-63) должно удовлетворяться для произвольных x. Выбор наборов коэффициентов, являющихся решениями уравнения (1-63), будет зависеть от дополнительных требований к системе, таких как обеспечение устойчивости решения, времени перехода, перерегулирования и других. Проиллюстрируем данные предложения на решении примера.

Пусть требуется отыскать коэффициенты обратной связи Θ_1, Θ_2 в уравнении регулятора

$$U(x) = \Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2, \tag{1-64}$$

реализующего МДУ

$$\ddot{U} x_1 - \dot{U}(U + x_1) + x_1^2 = 0, \tag{1-65}$$

которое является оптимальным для объекта

$$\dot{x}_1 = U, \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2, \tag{1-66}$$

при критерии

$$I = \int_0^T (x_1^2 + U^2)\, dt. \tag{1-67}$$

Совместное решение уравнений объекта (1-66), регулятора (1-64) и вычисленного из УОП уравнения МДУ (1-65) позволяет получить алгебраическое уравнение связи между коэффициентами обратной связи Θ_1, Θ_2 и координатами объекта x_1, x_2:

$$x_1^2(1 - \Theta_1)^2 + 2x_1^3\Theta_2(\Theta_1 - 1) + x_1^3 x_2 \Theta_2^2 +$$
$$+ x_1 x_2 \Theta_2(2 - \Theta_1 - \Theta_1^2) + x_2^2 \Theta_2^2(1 - \Theta_1) = 0.$$

Последнее уравнение выполняется для любых координат x_1, x_2, когда сомножители x_1, x_2, зависящие от Θ_1, Θ_2, равны нулю. Это справедливо при $\Theta_2 = 0$, $(\Theta_1)_{1,2} = \pm 1$, т. е. при оптимальном управлении

$$U = \pm x_1. \qquad (1\text{-}68)$$

Анализ траектории движения объекта (1-66) методами качественного исследования динамических систем [12] показывает, что при управлениях $U = \pm x_1$ особой точкой системы (1-66) является начало координат (0,0), причем для $U = +x_1$ особая точка имеет характер седла с сепаратрисами $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{x_1^3}{3}$ (рис 1.11), а управление $U = -x_1$ придает особой точке характер устойчивого дикритического узла (рис. 1.12).

Из полученных траекторий движения объекта под управлением $U = \pm x_1$ следует, что если граничные точки $x(0)$, $x(T)$ заданы на линии статического равновесия $x_2 = x_1^2$, то оптимальными последовательностями управлений будут: $U = \{+x_1, -x_1\}$ для случая $x_{1T} > x_{10}$; $U = \{-x_1, +x_1\}$, если $x_{1T} < x_{10}$.

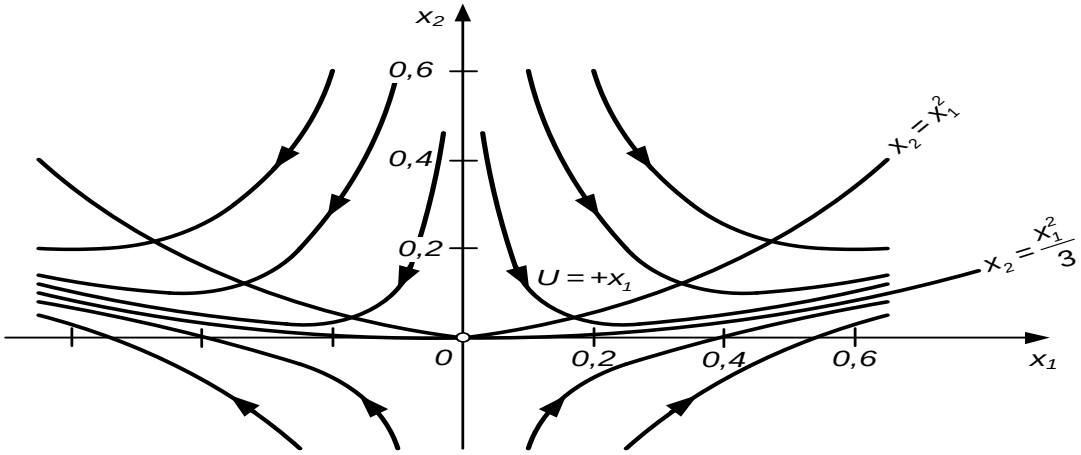

Рис. 1.11. Траектории объекта при управлении $U = +x_1$

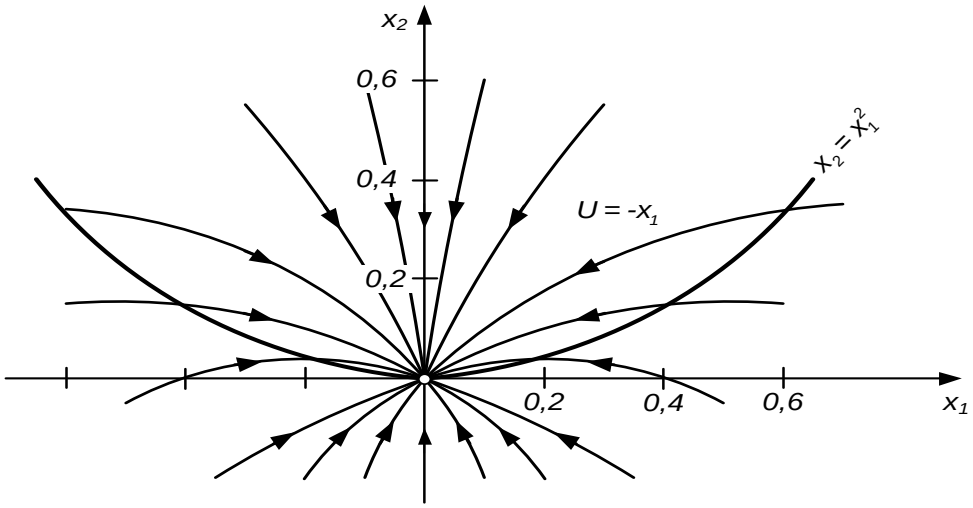

Рис. 1.12. Траектории объекта при управлении $U = -x_1$

Это подтверждается расчетом значения функционала I (1-67) при различных управляющих последовательностях. Например, если $x(0) = (0.2{,}0.04)$, $x(T) = (0.5{,}0.25)$, то для управления $U = \{+x_1, -x_1\}$ значение функционала $I = 0.835$ при времени перехода $T = 1.73$. Значение I под $U = \{+x_1, -x_1\}$ меньше, чем при управляющих последовательностях:

– $\{+1, -1\}$, оптимального в смысле быстродействия и функционала $I = \int_0^T x_1^2\, dt$, здесь $I = 1.151$ при $T = 0.96$;

– $\{+1, -x_1\}$, где $I = 1.158$ при $T = 1.07$;

– $\{+x_1, -1\}$, где $I = 0.92$ при $T = 1.62$;

из сравнения которых видно, что I тем меньше, чем более продолжителен участок с $U = \pm x_1$. Траектории координат для указанных последовательностей управлений показаны на рис. 1.13.

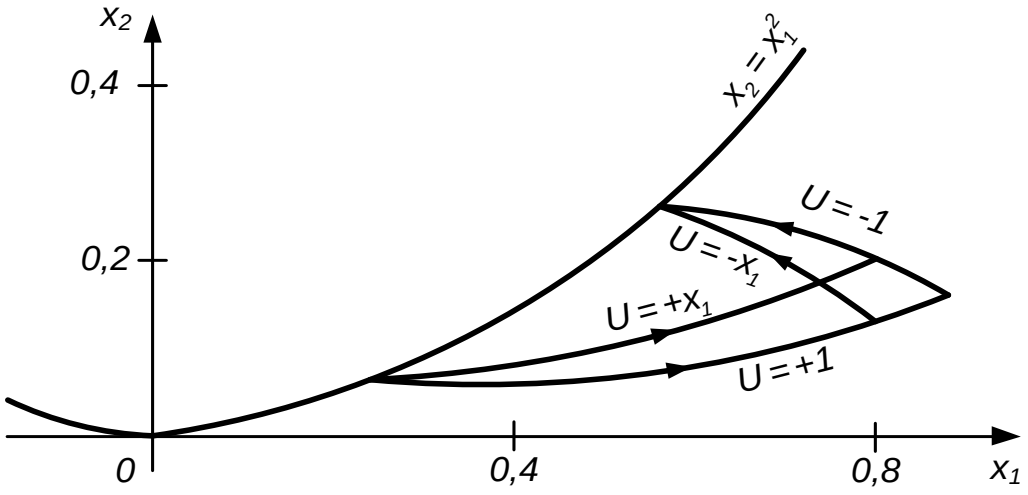

Рис. 1.13. Траектории объекта при различных управляющих последовательностях

Полученное оптимальное управление в виде кусочно-непрерывного $U = \pm x_1$ имеет существенные достоинства: известна зависимость управления от координаты, малое время перехода; однако с точки зрения его реализации такое управление имеет значительные недостатки: необходимость реализации линии переключения, большое перерегулирование по координате x_1, необходимость включения контура стабилизации в конечной точке.

От указанных недостатков можно избавиться, если использовать в реализации управления коэффициент обратной связи $\Theta = -1$, при котором обеспечивается асимптотическая устойчивость начала координат. Используя результаты предыдущего параграфа по синтезу

замкнутых систем с устойчивостью произвольного конечного состояния на статической характеристике $x(T) = (x_{1T}, x_{2T})$, в данном случае $x_{2T} = x_{1T}^2$, с помощью построения системы сравнения или введения добавки управления получим управление вида

$$U = x_{1T} - x_1, \tag{1-69}$$

при котором состоянием равновесия объекта (1-66) является ка(x_{1T}, x_{2T}), принимающая характер устойчивого вырожденного узла. Траектории координат для объекта (1-66) при управлении (1-69) показаны на рис. 1.14.

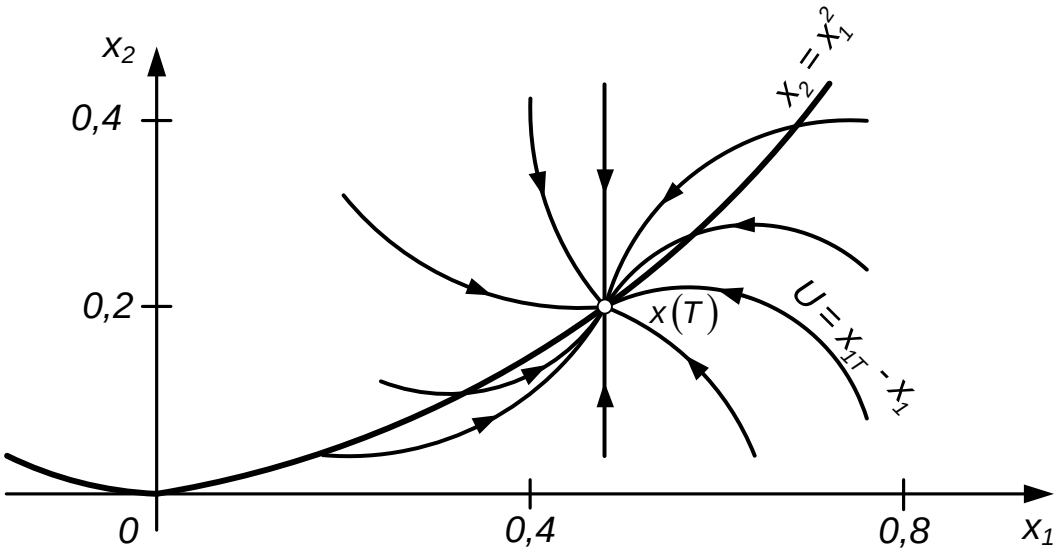

Рис. 1.14. Траектории объекта при квазиоптимальном управлении

Хотя под управлением (1-69) конечное состояние достигается при времени перехода $T \to \infty$, но с достаточной для практики точностью можно принять время T конечным. Например, если $x(0) = (0.2{,}0.04)$, $x(T) = (0.5{,}0.25)$, то под управлением (1-69) за время $T = 5\ c$ достигается состояние $(0.493{,}0.24)$, что составляет 96% от требуемой x_{2T} и потому вполне приемлемо. Численный расчет значения функционала I (1-67) при управлении вида (1-69) показывает, что такое управление можно считать квазиоптимальным для минимизации данного функционала. Так, под управлением (1-69) из $x(0) = (0.2{,}0.04)$ в $x(T) = (0.5{,}0.25)$ величина функционала I равна 0,85 при $T = 5\ c$, тогда как при оптимальном управлении $U = \{+x_1, -x_1\}$ величина функционала $I = 0.835$ при $T = 1.73\ c$, т. е. значение I при управлении (1-69) увеличилось всего на 2%. Для выполнения вторич-

ных показателей качества переходного процесса, таких как время регулирования, перерегулирование и т. п., можно задавать различные моменты переключения с оптимальной траекторией на квазиоптимальную под управлением вида (1-69).

Отметим, что использование квазиоптимального управления оказывается иногда единственно приемлемым, когда, например, для этого же объекта (1-68) ставится задача минимизации функционала $I = \int_0^T U^2\,dt$. В этом случае применение УОП для нелинейных объектов в $R_{n+2} = R_4$ дает уравнение оптимального управления $\ddot{U}x_1 - \dot{U}(U + x_1) = 0$.

При задании оптимального управления в виде $U(x) = \Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2$ получается уравнение связи коэффициентов Θ_1, Θ_2 и координат x_1, x_2:

$$x_1^2\Theta_1^2 + 2x_1^3\Theta_2(\Theta_1 - 1) + x_1^2 x_2\Theta_2^2 + \\ + x_1 x_2\Theta_2(2 - \Theta_1 - \Theta_1^2) + x_2^2\Theta_2^2(1 - \Theta_1) = 0,$$

которое справедливо, если $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$, при этом функционал $\int_0^T U^2\,dt$ имеет абсолютный минимум, равный нулю.

Однако такое оптимальное управление $U = 0$ имеет ограниченную область достижимости, поэтому для граничных условий, заданных на линии статического равновесия, следует применять квазиоптимальное управление вида $U = \Theta(x_{1T} - x_1)$, где Θ выбирается минимальным из области его допустимых значений.

1.2. НЕЛИНЕЙНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

1.2.1. Постановка задачи

Кроме рассмотренных выше стационарных объектов, существует также класс нестационарных объектов, в которых дифференциальные уравнения зависят не только от координат объекта, но также и от времени.

По аналогии со стационарными объектами для нелинейных нестационарных объектов с линейным скалярным управлением используется математическое описание в векторно-матричной форме типа (В-7) [57, 64]

$$\dot{x} = A(x, t) + B(x, t)U, \qquad (1\text{-}70)$$

где вектор координат x и управление U принадлежат замкнутым ограниченным множествам $x \in \Omega_x \subset R_n$, $|U| \leq U_{max}$, относительно элементов матриц $A(x,t)$ и $B(x,t)$ предполагается, что они непрерывны и дифференцируемы по x и t, требуется определить оптимальное управление U, переводящее объект из начального состояния $x(t=0)$ в конечное $x(t=T)$, минимизирующее при этом интегральный функционал как в задачах на минимум ресурсов (В-2, В-9)

$$I = \int_0^T p(x,t)dt, \tag{1-71}$$

в котором функция $p(x,t)$ непрерывна и дифференцируема по x и t, время перехода T не задано.

Для поставленной задачи с помощью принципа максимума [61] возможны два пути решения, различающиеся размерностью координат новой задачи, к которой производится переход от исходной нестационарной задачи:

1) вводятся две дополнительные координаты: координата x_0, учитывающая подынтегральное выражение в функционале

$$\dot{x}_0 = p(x,t),$$

и координата x_{n+1}, учитывающая явное вхождение времени

$$\dot{x}_{n+1} = 1.$$

Тем самым осуществляется переход к стационарной оптимальной задаче с размерностью координат (n+2)

$$\dot{\bar{x}} = A(\bar{x}) + B(\bar{x})U, \tag{1-72}$$

где

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \subset R_{n+2}, \qquad A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} p(x, x_{n+1}) \\ A(x, x_{n+1}) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x, x_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан H и вспомогательные переменные ψ для задачи (1-72) имеют вид

$$H = \left(\bar{\psi}, A(\bar{x})\right) + (\bar{\psi}, B(\bar{x})U), \qquad \frac{d\bar{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -\left(\frac{\partial A(\bar{x})}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial B(\bar{x})U}{\partial \bar{x}}\right)^T \bar{\psi}.$$

Так как гамильтониан линеен по управлению, то его максимум достигается при кусочно-постоянном оптимальном управлении

$$U(t) = U_{max}\, sign\left(\bar{\psi}, B(\bar{x})\right) = \begin{cases} +U_{max}, & \left(\bar{\psi}, B(\bar{x})\right) > 0, \\ -U_{max}, & \left(\bar{\psi}, B(\bar{x})\right) < 0; \end{cases}$$

2) производится переход к нестационарной оптимальной задаче в пространстве координат размерности (n+1), для чего вводится одна дополнительная координата x_0, учитывающая функционал $\dot{x}_0 = p(x,t)$, при этом новая оптимальная задача принимает вид

$$\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x}, t) + B(\tilde{x}, t)U, \qquad (1\text{-}73)$$

где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} \subset R_{n+1}, \qquad A(\tilde{x}, t) = \begin{pmatrix} p(x,t) \\ A(x,t) \end{pmatrix}, \qquad B(\tilde{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x,t) \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан и вспомогательные переменные для задачи (1-73) равны $H = \left(\tilde{\psi}, A(\tilde{x}, t)\right) + \left(\tilde{\psi}, B(\tilde{x}, t)U\right)$,

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{x}} = -\left(\frac{\partial A(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial B(\tilde{x}, t)U}{\partial \tilde{x}}\right)^T \tilde{\psi}.$$

Оптимальное управление определяется по уравнению

$$U(t) = U_{max}\, sign\left(\tilde{\psi}, B(\tilde{x}, t)\right) = \begin{cases} +U_{max}, & \left(\tilde{\psi}, B(\tilde{x}, t)\right) > 0, \\ -U_{max}, & \left(\tilde{\psi}, B(\tilde{x}, t)\right) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, принцип максимума определяет оптимальное управление в виде кусочно-постоянного с максимально допустимыми амплитудами на интервалах знакопостоянства соответствующих скалярных произведений $\left(\bar{\psi}, B(\bar{x})\right)$ или $\left(\tilde{\psi}, B(\tilde{x}, t)\right)$. Если же на некоторых интервалах времени скалярные произведения $\left(\bar{\psi}, B(\bar{x})\right)$ или

$\left(\tilde{\psi}, B(\tilde{x}, t)\right)$ и их производные по времени равны нулю, то принцип максимума не позволяет однозначно определить оптимальное управление через вспомогательные переменные и такая ситуация считается особой.

1.2.2. УОП для нелинейных нестационарных объектов

Для исследования особых ситуаций воспользуемся аппаратом УОП для нелинейных объектов, позволяющим, в отличие от других методов, проводить такое исследование в пространстве параметров и координат нелинейного объекта без анализа вспомогательного вектора ψ.

Выявление конструктивности представлений исходной нестационарной задачи с целью использования УОП для нелинейных объектов произвольного порядка затруднительно, поэтому рассмотрим управление объектом второго порядка общего вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_1(x_1, t)U, \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t), \end{cases} \tag{1-74}$$

с минимизируемым критерием

$$I = \int_0^T p(x_1, x_2, t)dt. \tag{1-75}$$

В представлении (1-72) в пространстве $R_{n+2} = R_4$ вектор $\bar{x}$ и вектор-функции $A(\bar{x})$ и $B(\bar{x})$ будут равны

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} p(x_1, x_2, x_3) \\ 0 \\ f(x_1, x_2, x_3) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad B(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1(x_1, x_3) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат $R_{n+2} = R_4$, вычислим векторы B_1, B_2, B_3, B_4 по рекуррентному соотношению (1-9)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} -b_1 \dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial b_1}{\partial x_3} \\ -b_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad B_4 = \begin{pmatrix} b_{41} \\ b_{42} \\ b_{43} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} -2\frac{\partial b_1}{\partial x_3}\frac{\partial p}{\partial x_1} - b_1\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} - b_1 U\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial p}{\partial x_1} + b_1\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}\right) - b_1 f\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\frac{\partial p}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial^2 b_1}{\partial x_3^2} + b_1 U\frac{\partial^2 b_1}{\partial x_1 \partial x_3} - U\frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial b_1}{\partial x_3} \\ -2\frac{\partial b_1}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_1} - b_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - b_1 U\left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + b_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) - b_1 f\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

из которых образуем матрицу

$$D_4 = (B_1\ B_2\ B_3\ B_4).$$

$$D_4 = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -b_1\dfrac{\partial p}{\partial x_1} & -2\dfrac{\partial b_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} - b_1\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_3} - b_1 U\left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + b_1\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}\right) - b_1 f\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & & b_{41} \\ b_1 & \dfrac{\partial b_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial^2 b_1}{\partial x_3^2} + b_1 U\dfrac{\partial^2 b_1}{\partial x_1 \partial x_3} - U\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial b_1}{\partial x_3} & & b_{42} \\ 0 & -b_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} & -2\dfrac{\partial b_1}{\partial x_3}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} - b_1 U\left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) - b_1 f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} & & b_{43} \\ \hline 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Так как в уравнениях объекта в последней строке стоит уравнение $\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_3 = 1$, производные от правой части этого уравнения по переменным объекта будут равны 0, нижняя строка матрицы D_4 будет нулевой, что сохранится при любом порядке объекта. Тогда $det\, D_{n+2} = det\, D_4$ будет тождественно равен нулю. Это говорит о том, что оптимальное управление в пространстве R_{n+2} неединственно.

Это можно объяснить тем, что для введенной переменной $x_{n+1} = t$ не задаются граничные условия и для различных начальных условий координаты $(x_{n+1})_0 = t_0$ можно получить оптимальные траектории, имеющие одинаковую величину функционала I, равную x_{0min}. Графически в пространстве $R_{n+2} = R_3$ такая ситуация показана на рис. 1.15.

Несмотря на неединственность управления в R_{n+2}, можно выделить особое управление в пространстве R_{n+1}, содержащем объект и критерий оптимальности. Для этого необходимо составить для рассматриваемого примера матрицы D_3^i, $i = 1,2,\dots,k$ размером (3×3) с комбинациями векторов B_1, B_2, B_3, B_4, в которых исключены нулевые элементы нижней строки b_{j4}, $j = 1,2,3,4$, и приравнять $det\, D_3^i$ к нулю. Число матриц D_3^i равно числу сочетаний из четырех векторов по три: $k = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$. Отметим, что с меньшими вычислительными затратами особое управление в R_{n+1} определяется из приравненного нулю детерминанта матрицы D_3^1, составленной из векторов B_1, B_2, B_3 с исключенными нулевыми элементами нижней строки. Такая матрица выделена сплошной линией в матрице D_4. К тому же оказывается, что полученное из $det\, D_3^1$ особое управление является общим, так как удовлетворяет уравнениям особого управления, полученного из детерминантов других матриц D_3^i.

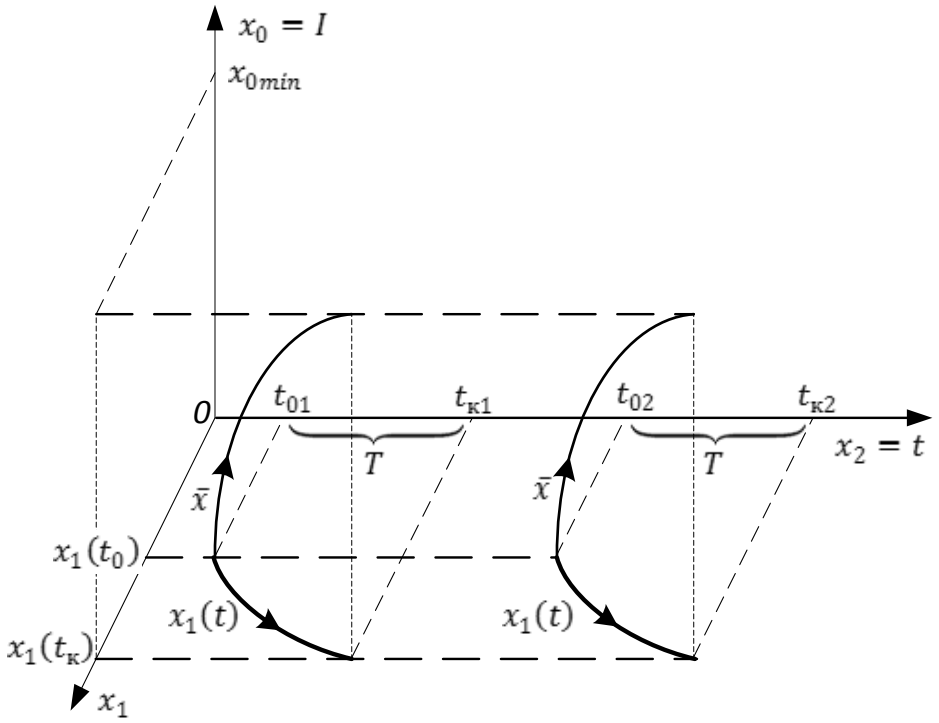

Рис. 1.15. Неединственность оптимального управления в R_{n+2}

Из полученных результатов о невключении координаты $x_{n+1} = t$ и общем уравнении особого управления из $det\, D_3^1$ следует, что проверку УОП в задаче (1-72) достаточно проводить в пространстве состояний $R_{n+1} = R_3$.

Из полученных результатов также следует, что для исследования особой ситуации в задаче (1-74, 1-75) достаточно представить ее нестационарной задачей вида (1-73), причем при проверке УОП векторы B_j вычислять по нестационарному рекуррентному соотношению с дополнительными слагаемыми dB_{j-1}/dt, учитывающими явное вхождение времени:

$$B_j(\tilde{x},t,U,\dot{U},\dots) = \frac{\partial B_{j-1}}{\partial U^{(j-3)}}\frac{d^{(j-3)}U}{dt^{(j-3)}} + \frac{\partial B_{j-1}}{\partial \tilde{x}}(A(\tilde{x},t)+B(\tilde{x},t)U) - \\ -\left(\frac{\partial A(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial B(\tilde{x},t)U}{\partial \tilde{x}}\right)B_{j-1} + \frac{\partial B_{j-1}}{\partial t}, \\ B_1(\tilde{x},t) = B(\tilde{x},t), \qquad j = 2,3,\dots,n,n+1. \tag{1-76}$$

Так, при представлении задачи (1-74, 1-75) в виде (1-73) с

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A(\tilde{x},t) = \begin{pmatrix} p(x_1,x_2,t) \\ 0 \\ f(x_1,x_2,x_3) \end{pmatrix}, \qquad B(\tilde{x},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1(x_1,x_3) \\ 0 \end{pmatrix}$$

и проверки УОП в R_{n+1} по соотношению (1-76) векторы $B_2(\tilde{x},t)$, $B_3(\tilde{x},t)$ равны:

$$B_1(\tilde{x},t) = B(\tilde{x},t), \qquad B_2(\tilde{x},t) = \begin{pmatrix} -b_1\dfrac{\partial p}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial b_1}{\partial t} \\ -b_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \end{pmatrix},$$

$$B_3(\tilde{x},U,t) = \\ = \begin{pmatrix} -2\dfrac{\partial b_1}{\partial t}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} - b_1\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial t} - b_1 U\left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial p}{\partial x_1} + b_1\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1^2}\right) - b_1 f\dfrac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\dfrac{\partial p}{\partial x_2}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 b_1}{\partial t^2} + b_1 U\dfrac{\partial^2 b_1}{\partial x_1 \partial t} - U\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial b_1}{\partial t} \\ -2\dfrac{\partial b_1}{\partial t}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} - b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial t} - b_1 U\left(\dfrac{\partial b_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + b_1\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right) - b_1 f\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + b_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Составляя из полученных векторов $B_1(\tilde{x},t)$, $B_2(\tilde{x},t)$, $B_3(\tilde{x},U,t)$, которые равны векторам $B_1(\bar{x})$, $B_2(\bar{x})$, $B_3(\bar{x},U)$, вычисленным в R_{n+2} с исключенными нижними нулевыми элементами, матрицу D_3

$$D_3 = \left(B_1(\tilde{x},t)\ B_2(\tilde{x},t)\ B_3(\tilde{x},U,t)\right)$$

и вычисляя ее детерминант, определяем особое управление, совпадающее с вычисленным из УОП в R_{n+2}.

Таким образом, более конструктивным с точки зрения вычислительных затрат является представление исходной нестационарной задачи в пространстве R_{n+1} в виде (1-73) и проверки УОП в R_{n+1} по нестационарному рекуррентному соотношению (1-76).

Следует отметить, что набор ситуаций, при которых не выполняются УОП, вытекающих из выражения для детерминанта матрицы D_{n+1}, для нестационарных объектов больше, чем для стационарных, так как в выражение для детерминанта D_{n+1} в общем случае входят координаты, управление и его производные, а также время. Для нестационарных объектов возможны как аналогичные стационарным ситуации вырождения: с конечным числом особых траекторий, со множеством особых управлений, УОП могут не выполняться для любых управлений и координат; так и отличные от стационарных ситуации, когда УОП не выполняются в некоторые моменты времени. Последнее обстоятельство приводит к тому, что топологическая структура и бифуркационные свойства оптимальных траекторий будут зависеть от времени.

Аналогично приведённому выше решению задачи (1-74, 1-75), рассмотрим управление нестационарным объектом второго порядка общего вида с последовательно соединёнными звеньями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,x_2,t) + f_U(x_1,x_2,t)U, \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,x_2,t), \end{cases} \tag{1-77}$$

с минимизируемым критерием

$$I = \int_0^T f_0(x_1,x_2,t)dt. \tag{1-78}$$

В представлении (1-73) для задачи (1-77, 1-78) в пространстве $R_{n+1} = R_3$ вектор $\tilde{x}$ и вектор-функции $A(\tilde{x},t)$ и $B(\tilde{x},t)$ будут равны

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ \ A(\tilde{x},t) = \begin{pmatrix} f_0(x_1,x_2,t) \\ f_1(x_1,x_2,t) \\ f_2(x_1,x_2,t) \end{pmatrix},\ \ B(\tilde{x},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f_U(x_1,x_2,t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если вычислять векторы $B_2(\tilde{x},t)$, $B_3(\tilde{x},t)$ по нестационарному рекуррентному соотношению (1-76), то выражения получатся достаточно громоздкими. Приведём лишь результат вычисления особого управления из приравнивания нулю определителя матрицы $det\, D_3$:

$$U_{oc} = \frac{\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} f_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2} f_2 + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial t}\right)}{f_U\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}\right)} + \\ + \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2} f_1 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_2} f_2 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial t}\right)}{f_U\left(\frac{\partial f_0}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}\right)}. \tag{1-79}$$

В последнем выражении множитель $f_U(x_1, x_2, t)$ перед U в объекте (1-77) находится в знаменателе, тогда при подстановке уравнения (1-79) в систему (1-77) данный множитель сократится и не будет оказывать влияния на изменение топологии или бифуркационных свойств [6] особых траекторий. При усложнении системы общего вида и/или критерия результат получается настолько громоздким, что его анализ в общем виде становится невозможен, а управление, как правило, выражается не алгебраической функцией, а в виде дифференциального уравнения, порядок которого зависит от размерности исходного объекта.

1.2.3. Бифуркационные свойства управления

Для выявления качественных свойств оптимального управления нелинейными нестационарными объектами рассмотрим конкретные примеры объектов с различным вхождением функции времени в уравнения движения объекта. Эта функция времени характеризует возмущающее воздействие на объект управления и может входить в уравнение движения объекта различным образом. Под аддитивным вхождением возмущения будем считать случай, когда функция времени суммируется с координатами объекта, под мультипликативным – когда функция времени умножается на координаты объекта. При смешанном вхождении функция времени суммируется и умножается на координаты объекта. В первых двух примерах с экстремальными статистическими характеристиками основное внимание уделяется вычислению особого управления, в других примерах рассмотрим влияние вхождения времени на бифуркационные свойства оптимального управления.

Пример 1. Аддитивное вхождение возмущения

Рассмотрим вычисления особого управления для нестационарного объекта

$$\dot{x}_1 = U, \qquad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 + a\,sin\,t - x_2, \tag{1-80}$$

в задаче на минимум ресурсов с

$$I = \int_0^T x_1 dt.$$

Преобразуя исходную задачу к стационарной в пространстве $R_{n+2} = R_4$ вида (1-72), запишем новую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = x_1, \\ \dot{x}_1 = U, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 + a \cdot sin\,x_3 - x_2, \\ \dot{x}_3 = 1. \end{cases}$$

Применяя УОП в $R_{n+2} = R_4$, по соотношению (1-9) вычислим векторы B_1, B_2, B_3, B_4, из которых образуем матрицу

$$D_4 = (B_1\ B_2\ B_3\ B_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_1 - 1 & 2x_1 - 1 + 2U & 2\dot{U} + 4U + 2x_1 - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

УОП в $R_{n+2} = R_4$ тождественно не выполняются, так как $det\,D_4 \equiv 0$. Особое управление можно вычислить из определителя матрицы D_3, выделенной в D_4

$$det\,D_3 = 2U + 2x_1 - 1 = 0.$$

Особое управление $U_{oc} = 0{,}5 - x_1$ не зависит от времени и совпадает с особым управлением, присущим соответствующему стационарному объекту. Кроме того, вычисленное из $det\,D_3$ особое управление является общим, так как обращает в нуль определители других матриц, образованных из D_4. Так, элемент b_{43} вектора B_4

$$2\dot{U} + 4U + 2x_1 - 1$$

при $U = 0{,}5 - x_1$ с учетом уравнений связи

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} = -\dot{x}_1 = -U$$

равен нулю.

Отметим, что это же особое управление проще получить из УОП в $R_{n+1} = R_3$ с вычислением векторов B_j, $j = 1{,}2{,}3$ по нестационарному рекуррентному соотношению (1-76).

Проведём качественный анализ полученного особого управления $U = 0.5 - x_1$. Система (1-80) под особым управлением примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.5 - x_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 + a\sin t - x_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases} \qquad (1\text{-}81)$$

Состоянием равновесия (особыми точками, точками, в которых производные равны нулю $P(x_{10}, x_{20}) = Q(x_{10}, x_{20}) = 0$) системы (1-81) являются точки $(x_{10}, x_{20}) = (0{,}5, 0{,}25 + a\,sin\,t)$. Применяя качественную теорию дифференциальных уравнений, найдём в окрестности особой точки следующие параметры:

$$\Delta(x_{10}, x_{20}) = \begin{vmatrix} P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & P'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \\ Q'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \left.\dfrac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_{10}, x_{20}} & \left.\dfrac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_{10}, x_{20}} \\ \left.\dfrac{\partial Q(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_{10}, x_{20}} & \left.\dfrac{\partial Q(x_1, x_2)}{\partial x_2}\right|_{x_{10}, x_{20}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ (1 - 2x_1)|_{x_{10}, x_{20}} & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\sigma(x_{10}, x_{20}) = P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) + Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) = -2.$$

Так как $\Delta(x_{10}, x_{20}) \neq 0$, то это состояние равновесия является простым.

Характеристическое уравнение для линеаризованной в окрестности точки (x_{10}, x_{20}) системы через параметр Δ и σ запишется в виде

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$

решая которое находим характеристические корни

$$\lambda_{1,2} = -1.$$

Корни характеристического уравнения действительные, одинаковых знаков, $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ – данное состояние равновесия является устойчивым узлом.

«Статическая» характеристика объекта управления имеет вид

$$x_2 = x_1 - x_1^2 + a\,sin\,t.$$

Для того чтобы корни данного уравнения были действительными числами, необходимо, чтобы параметр дрейфа $|a| \leq 0{,}25$, хотя в общем случае данный параметр может принимать и большие значения. Примем $a = 0{,}2$. На рис. 1.16 показаны графики изменения координат от времени и фазовые траектории системы. Как видим, траектории, начинающиеся в первом квадранте, стремятся к экстремуму «статической» характеристики, вследствие чего происходит отслеживание дрейфа экстремума. «Статическая» характеристика $x_2 = x_1 - x_1^2 + a\,sin\,t$ движется вдоль оси x_2 при изменении времени.

Из рассмотренного примера видно, что при аддитивном вхождении функции времени $det\,D_{n+1}$ и особое управление не содержит в явном виде времени, а оптимальное управление не отличается от управления для соответствующего стационарного объекта и не изменяется топология оптимальных траекторий.

Пример 2. Мультипликативное вхождение возмущения

Рассмотрим управления объектом

$$\dot{x}_1 = U, \dot{x}_2 = (1 + a\,sin\,t)(x_1 - x_1^2) - x_2 \qquad (1\text{-}82)$$

с минимумом критерия $I = \int_0^T x_1 dt$.

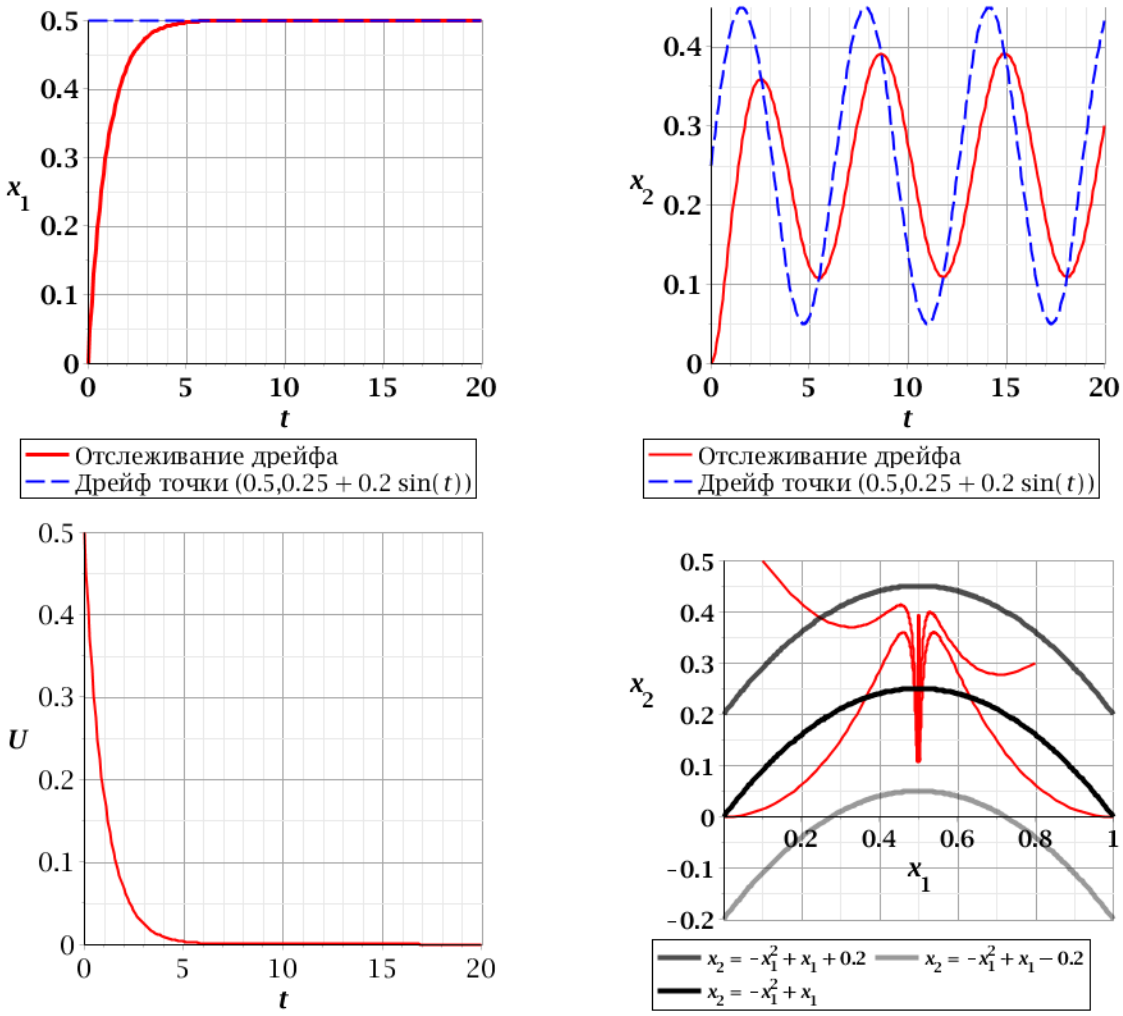

Рис. 1.16. Графики изменения координат от времени
и фазовый портрет системы

Применяя УОП в $R_{n+2} = R_4$, образуем матрицу D_4 из векторов B_1, B_2, B_3, B_4, вычисленных по соотношению (1-9)

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (2x_1 - 1)(1 + a\,sin\,x_3) & (1 + a\,sin\,x_3)(2x_1 - 1 + 2U) + a\,cos\,x_3(2x_1 - 1) & b_{43} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

УОП в R_4 тождественно не выполняются, так как $det\,D_4 \equiv 0$. Особое управление вычисляется из $det\,D_3$, образованной из D_4

$$det\,D_3 = (1 + a\,sin\,x_3)(2x_1 - 1 + 2U) + (2x_1 - 1)a\,cos\,x_3 = 0,$$

откуда особое управление получается равным

$$U_{oc} = 0{,}5 - x_1 - \frac{(2x_1 - 1)a\cos x_3}{2(1 + a\sin x_3)}.$$

Полученное особое управление обращает в нуль элемент b_{43} вектора B_4

$$b_{43} = 2\dot{U}(1 + a\sin x_3) + 4U(1 + a\sin x_3 + a\cos x_3) - \\ -(2x_1 - 1)(1 + 2a\cos x_3),$$

с учетом связей

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial U}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt},$$

т. е. особое управление является общим и нет необходимости вычислять вектор B_4, а достаточно проверить УОП в $R_{n+1} = R_3$ с нестационарным рекуррентным соотношением (1-76). Из данного примера следует, что при мультипликативном вхождении времени $det\, D_{n+1}$ и особое управление явно зависят от времени. При этом происходит бифуркация состояний равновесия и в некоторые моменты времени простые состояния равновесия превращаются в сложные.

Проведём качественный анализ полученного особого управления.

Система (1-82) под особым управлением примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.5 - x_1 - \dfrac{(2x_1 - 1)a\cos t}{2(1 + a\sin t)} = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = (1 + a\sin t)(x_1 - x_1^2) - x_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases} \qquad (1\text{-}83)$$

Состояниями равновесия (особыми точками) системы (1-50) являются точки $(x_{10}, x_{20}) = (0{,}5, 0{,}25 + 0{,}25a\sin t)$. Применяя качественную теорию дифференциальных уравнений, найдём в окрестности особой точки параметры:

$$\Delta(x_{10}, x_{20}) = \begin{vmatrix} P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & P'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \\ Q'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \end{vmatrix} = 1 + \frac{a\cos t}{1 + a\sin t},$$

$$\sigma(x_{10}, x_{20}) = P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) + Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) = -2 - \frac{a\cos t}{1 + a\sin t}.$$

В некоторые моменты времени простое состояние $\Delta \neq 0$ может превратиться в сложное $\Delta = 0$. Данный переход может существовать либо при

$$a = -\frac{1}{sin\, t + cos\, t},$$

либо в моменты времени, когда

$$1 + \frac{a\, cos\, t}{1 + a\, sin\, t} = 0 \Longrightarrow \frac{a\, cos\, t}{1 + a\, sin\, t} = -1 \Rightarrow a\, cos\, t + a\, sin\, t = -1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow cos\, t + sin\, t = -\frac{1}{a}.$$

По формуле преобразования тригонометрических функций:

$$cos\, \alpha + cos\, \beta = 2\, cos\frac{\alpha + \beta}{2} cos\frac{\alpha - \beta}{2};$$
$$cos\, t + sin\, t = cos\, t + cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 2\, cos\left(\frac{t + \frac{\pi}{2} - t}{2}\right) cos\left(\frac{t - \frac{\pi}{2} - t}{2}\right) =$$
$$= 2\, cos\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\, cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{a},$$

$$t = arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}a}\right) + \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m = 1,2,3 \ldots,$$

и в эти моменты времени простое состояние равновесия превращается в сложное.

Корни характеристического уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1 - \frac{a\, cos\, t}{1 + a\, sin\, t} = -\frac{1 + a\, sin\, t + a\, cos\, t}{1 + a\, sin\, t}.$$

Уравнение для λ_2 аналогично уравнению для параметра Δ. Для исследования знака характеристического корня λ_2 преобразуем его числитель и знаменатель в соответствии с формулой:

$$p\, cos\, A + q\, sin\, A = r\, sin(A + \Theta)\,, r = \sqrt{p^2 + q^2}, \Theta = arcsin\left(\frac{p}{r}\right)$$

к виду

$$\lambda_2 = -\frac{1 + a\sqrt{2}\,sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + a\,sin\,t}.$$

В результате исследования знака корня λ_2 при различных параметрах дрейфа и моментов времени получим:

– при параметре дрейфа $|a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ числитель и знаменатель всегда одного знака, поэтому простые состояния равновесия имеют в этом случае характер устойчивого узла;

– при параметре дрейфа $|a| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ числитель и знаменатель λ_2 на некоторых интервалах времени могут иметь различные знаки, в этом случае простое состояние равновесия принимает неустойчивый характер типа седло;

– при положительном параметре дрейфа $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ в моменты времени $t = \frac{5}{4}\pi + 2\pi m, m = 0,1,2,3 \ldots$, $\lambda_2 = 0$, $\Delta = 0$, простые состояния равновесия превращаются в сложные типа седло-узел, и поэтому этот параметр дрейфа и соответствующие моменты времени являются бифуркационными. Бифуркационными также являются отрицательный параметр дрейфа $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и момент времени $t = \frac{1}{4}\pi + 2\pi m$, $m = 0,1,2,3 \ldots$. Возникновение бифуркаций траекторий при изменении параметров присуще и стационарным объектам, для нестационарных объектов выявлена интересная особенность – бифуркации траекторий при изменении времени.

Графически это показано на рис. 1.17 – в синей области

$$\lambda_2 = -1 - \frac{a\,cos\,t}{1 + a\,sin\,t} < 0.$$

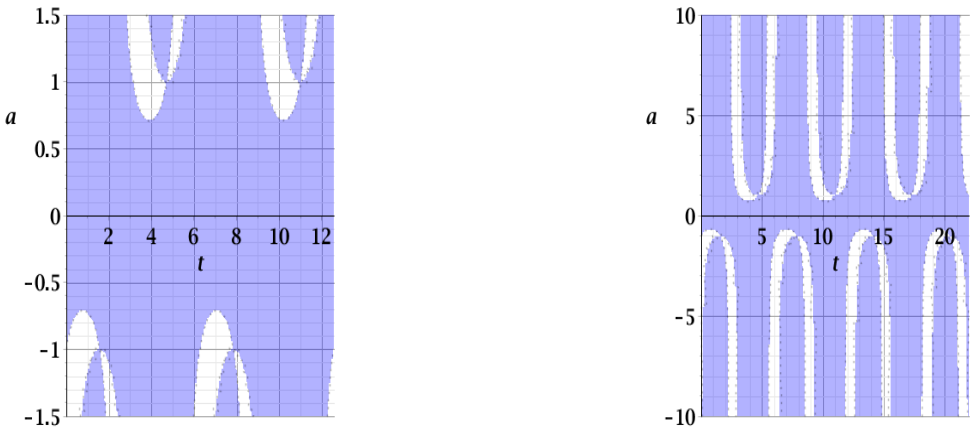

Рис. 1.17. Бифуркации траекторий при изменении времени

Результаты численного расчета движений объекта под особым управлением для начальных условий $x(0) = (0, 0)$ и параметре $a = 0.4 < \frac{1}{\sqrt{2}}$, подтверждают результаты анализа асимптотики траекторий и показаны на рис. 1.18, из которых следует, что при выбранном параметре дрейфа особое управление может быть принято за экстремальное управление. «Статическая» характеристика объекта управления имеет вид

$$x_2 = (1 + a\,sin\,t)(x_1 - x_1^2).$$

Как видно из графиков рис. 1.18, траектории под особым управлением стремятся в точку экстремума «статической» характеристики, таким образом происходит отслеживание данной точки. Сама «статическая» характеристика меняет коэффициент наклона (точки статической характеристики с разной скоростью перемещаются вдоль оси x_2) с течением времени.

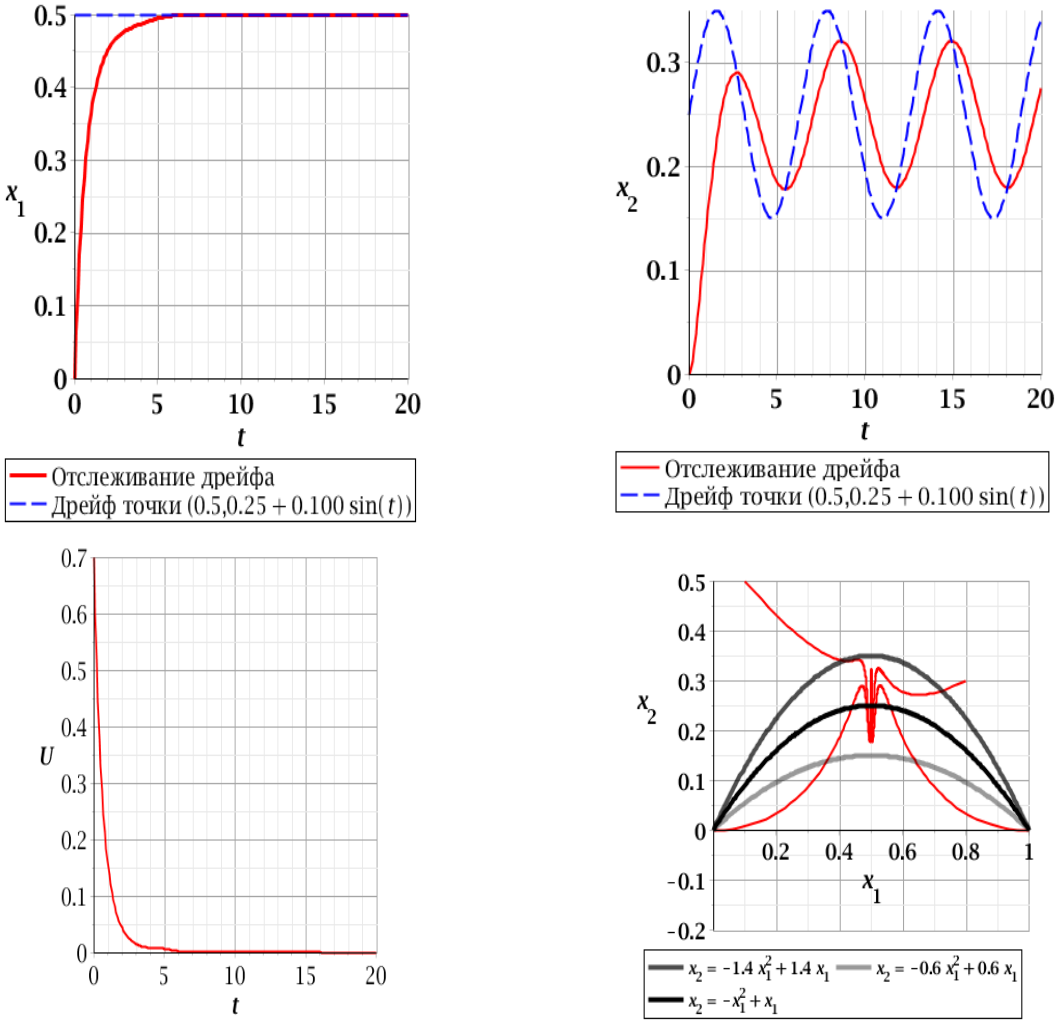

Рис. 1.18. Устойчивый характер особых траекторий

Если же собственные корни характеристического уравнения действительные и разных знаков, то такое положение равновесия является неустойчивым, или седлом. Например, для параметра дрейфа $a = 1$ получаем следующие графики (рис. 1.19), где под особым управлением траектории не приходят в экстремум статической характеристики, а лишь приближаются к нему на некоторое время, после чего отдаляются от этой точки.

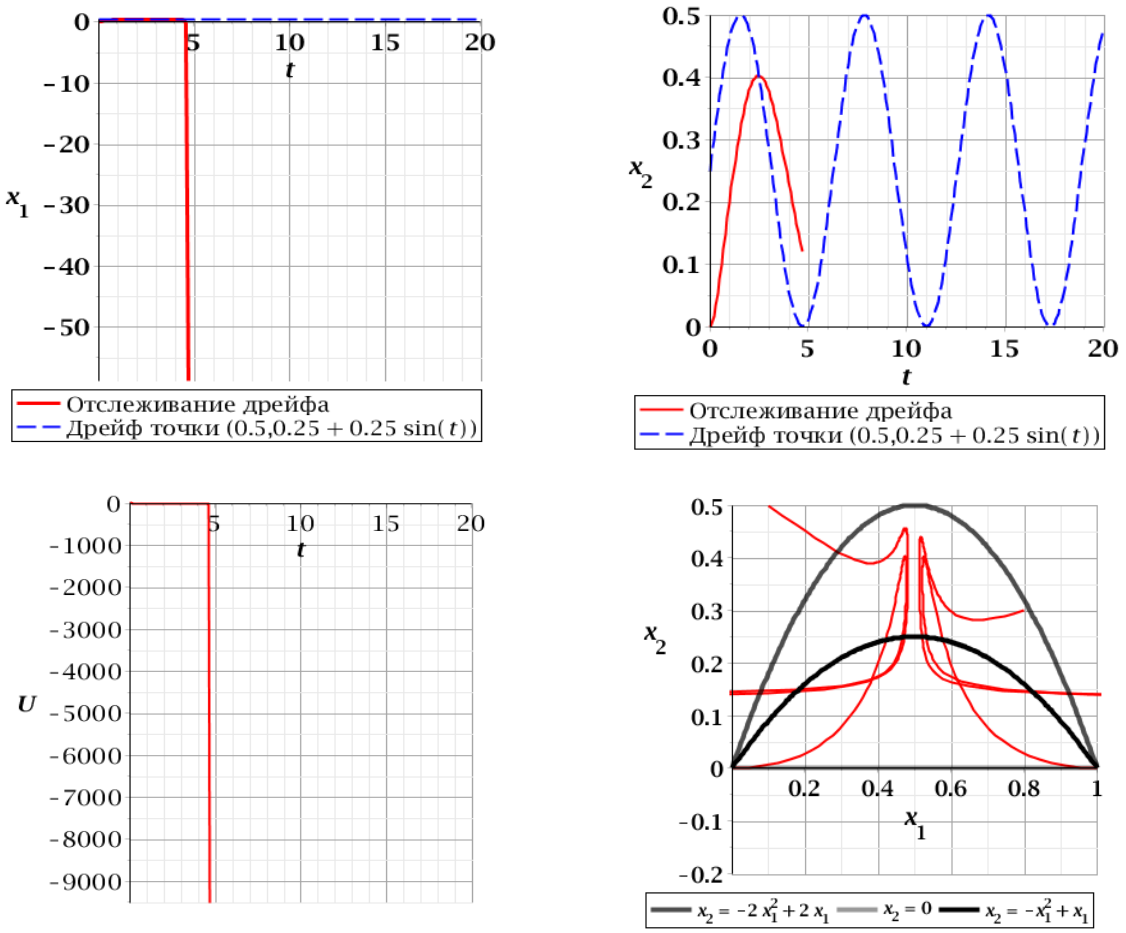

Рис. 1.19. Неустойчивый характер особых траекторий

<u>Пример 3</u>

Рассмотрим управление объектом с произведением координат

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = x_1(k - x_2 + x_2^2)$$

при минимизации критерия $I = \int_0^T x_1 dt$.

Этот объект интересен наличием особых решений в уравнениях объекта

$$(x_2)_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - k}$$

в зависимости от параметра k:

– для $k > 0{,}25$ особых решений в действительной области не существует и объект управляем во всем пространстве R_2;

– для $k = 0{,}25$ особое решение $(x_2)_{1,2} = 0{,}5$ выделяет два подпространства $x_2 < 0{,}5$, $x_2 > 0{,}5$, перейти из одного в другое никаким управлением невозможно;

– для $k < 0{,}25$ особыми решениями $(x_2)_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - k}$ выделяются три подпространства управляемости.

В уравнения объекта искусственно введем гармоническую нестационарность в изменение координат x_1 и параметра k. Для данного объекта из-за наличия произведения координат нет смысла говорить об отдельных аддитивном и мультипликативном вхождениях возмущений на координаты объекта.

Пример 3.1

При введении функции времени со знаком суммы с координатой x_1, т. е. при уравнениях объекта

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = (x_1 + a\,sin\,t)(k - x_2 + x_2^2),$$

при минимизации критерия $I = \int_0^T x_1 dt$ при проверке УОП в $R_{n+1} = R_3$ с вычислением векторов B_1, B_2, B_3 по нестационарному соотношению (1-76) получим

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1(k - x_2 + x_2^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $det\,D_3 \equiv 0$ и оптимальное управление для данного нестационарного объекта, как и для соответствующего стационарного, является неединственным в R_3.

Пример 3.2

При введении функции времени со знаком произведения с координатой x_1, т. е. при уравнениях объекта

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = x_1\,sin\,t\,(k - x_2 + x_2^2),$$

и проверки УОП в $R_{n+1} = R_3$ по нестационарному соотношению (1-76) получим

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 \sin t\,(k - x_2 + x_2^2) & -k_1 \cos t\,(k - x_2 + x_2^2) \end{pmatrix},$$
$$\det D_3 = -k_1^3 \cos t\,(k - x_2 + x_2^2).$$

УОП в $R_{n+1} = R_3$ не выполняются, во-первых, как в задаче быстродействия на особых решениях $(x_2)_{1,2} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - k}$ (см. Пример 3) системы уравнений объекта, во-вторых, в моменты времени

$$\cos t = 0, t = \frac{\pi}{2} + m\pi, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Из уравнений объекта следует, что решение $t = {}^{\pi}/_{2} + m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ указывает на наилучшую ситуацию изменения координаты x_2 с максимальной скоростью.

<u>Пример 3.3</u>

При введении функции времени со знаком суммы или произведения с параметром k

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = x_1(k + a \sin t - x_2 + x_2^2)$$

или

$$\dot{x}_1 = k_1 U, \qquad \dot{x}_2 = x_1(k \sin t - x_2 + x_2^2)$$

из проверки УОП в $R_{n+1} = R_3$ выражения для детерминантов матриц D_3 соответственно равны

$$\det D_3 = -k_1^3 a \cos t$$

или

$$\det D_3 = -k_1^3 k \cos t.$$

Из полученных выражений следует, что особая ситуация возникает в моменты времени $t = {}^{\pi}/_{2} + m\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Если обратиться к соответствующим уравнениям объекта, то в эти моменты времени обобщенные параметры $(k + a \sin t)$ или $k \sin t$ принимают наибольшее значение, а увеличение параметра, как следует из анализа управляемости объекта, приводит к расширению области достижимости координат объекта.

Пример 4. Смешанное вхождение возмущения

Горизонтальный дрейф «статической» характеристики

Для нелинейного нестационарного объекта со смешанным вхождением функции времени

$$\dot{x}_1 = U, \qquad \dot{x}_2 = (x_1 - a\,sin\,t)^q - x_2 \tag{1-84}$$

с экстремумами

$$x_1 = a\,sin\,t\,, \qquad x_2 = 0$$

при минимизации критерия $I = \int_0^T x_1 dt$ найти особое и экстремальное управление.

Применяя УОП в $R_{n+1} = R_3$, находим особое управление из определителя матрицы D_3, образованной из векторов B_1, B_2, B_3, вычисленных по соотношению (1-76):

$$U_{oc} = \frac{a(cos\,t\,(q-1) + sin\,t) - x_1}{q-1}.$$

Проведём качественный анализ полученного особого управления. Система (1-84) под особым управлением примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{a(cos\,t\,(q-1) + sin\,t) - x_1}{q-1} = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = (x_1 - a\,sin\,t)^q - x_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases} \tag{1-85}$$

Состояниями равновесия (особыми точками), в которых производные равны нулю $P(x_{10}, x_{20}) = Q(x_{10}, x_{20}) = 0$, в системе (1-85) являются точки $(x_{10}, x_{20}) = \left(a(cos\,t\,(q-1) + sin\,t),\ \left(a\,cos\,t\,(q-1)\right)^q\right)$. Применяя качественную теорию дифференциальных уравнений, найдём в окрестности особых точек следующие параметры:

$$\Delta(x_{10}, x_{20}) = \begin{vmatrix} P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & P'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \\ Q'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \end{vmatrix} = \frac{1}{q-1},$$

$$\sigma(x_{10}, x_{20}) = P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) + Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) = -\frac{q}{q-1}.$$

Характеристическое уравнение для линеаризованной в окрестности точки (x_{10}, x_{20}) системы через параметры Δ и σ запишется в виде

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -\frac{1}{q-1}.$$

Для того чтобы состояние равновесия было устойчивым узлом ($\lambda_{1,2} < 0$), необходимо, чтобы $q > 1$ (рис. 1.20). В противном случае корни будут действительные и разных знаков – это состояние равновесия является седлом (неустойчивое состояние). Читателю рекомендуется исследовать фазовые траектории в случае $q \leq 1$.

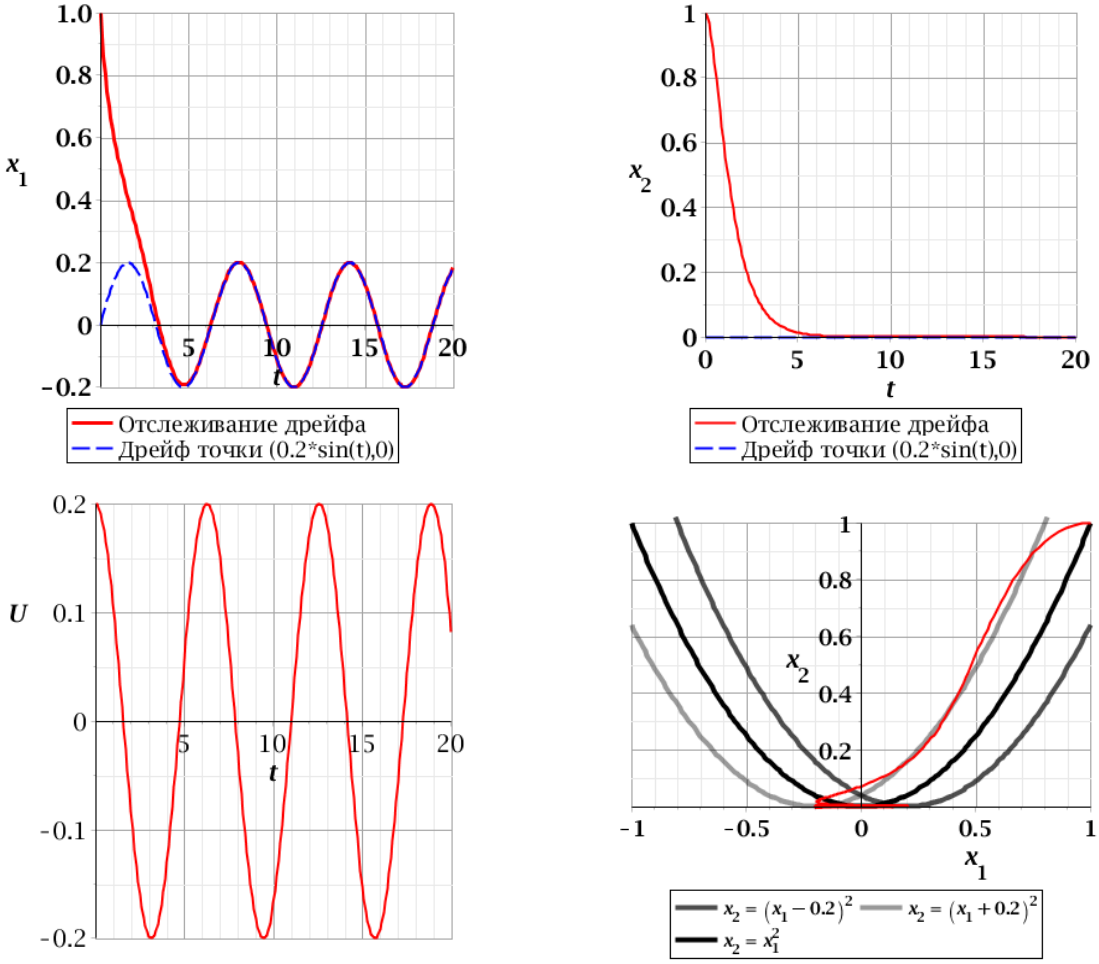

Рис. 1.20. Устойчивые особые траектории при $q > 1$

1.2.4. Управление экстремальными объектами с произвольным конечным состоянием

1.2.4.1. Стационарные объекты

Структура большого класса объектов экстремального управления, как показано в работах [35, 75, 82], может быть представлена последовательным соединением линейного динамического звена и не-

линейного динамического звена с экстремальной статической характеристикой (рис. 1.21) при дифференциальных уравнениях связи:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{k_1 U - k_2 x_1}{T_1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k_3 |x_1 - a|^q + b - x_2}{T_2}, \end{cases} \tag{1-86}$$

где (a, b) – координаты точки экстремума статической характеристики объекта управления, показатель q степени характеристики положителен, коэффициент $k_3 > 0$ для выпуклых статических характеристик, имеющих минимум, $k_3 < 0$ для вогнутых статических характеристик, имеющих максимум.

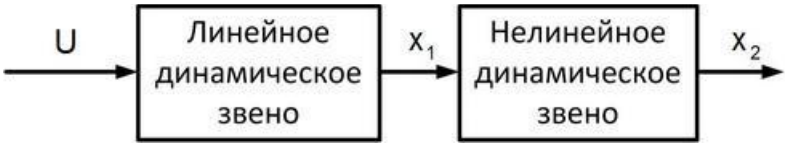

Рис. 1.21. Структура экстремального объекта управления

Граничные условия $x(0)$ и $x(T)$ заданы на множестве стационарных состояний (статической характеристике) системы (1-86), которым является линия $x_2 = k_3|x_1 - a|^q + b$. Требуется найти управление U, $|U| \leq 1$, минимизирующее функционал

$$I = \int_0^T (x_1 - x_{1t})^p dt, \tag{1-87}$$

где T – время переходного процесса не задано, x_{1t} – число.

Модель (1-86) в общем случае является неаналитической функцией, за исключением случаев четных показателей q. Относительно неаналитической модели (1-86) предполагается, что в подпространствах входной координаты нелинейного звена $x_1^+ = \{x_1 \geq a\}$ и $x_1^- = \{x_1 < a\}$ известны соответствующие аналитические функции, тогда

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} \dfrac{k_3 (x_1 - a)^q + b - x_2}{T_2}, & \text{если } x_1 \geq a; \\ \dfrac{k_3 (a - x_1)^q + b - x_2}{T_2}, & \text{если } x_1 \geq a. \end{cases} \tag{1-88}$$

Анализ и моделирование системы (1-86) проводятся в относительных единицах. На фазовые координаты наложены безусловные ограничения $\Omega_x = \{(x_1, x_2)\colon\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0\ \le x_2 \le 1\}$. На остальные параметры наложены следующие ограничения: $|U| \le 1,\ \ k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $a \in [0,1]$, $b \in [0,1]$.

Применяя УОП в $R_{n+1} = R_3$ с вычислением векторов B_1, B_2, B_3 по рекуррентному соотношению (1-9), составляя матрицу $D_3 = (B_1\quad B_2\quad B_3)$, находя её определитель $det\, D_3$ и вычисляя из него особое управление, получим:

$$U_{oc} = \frac{(k_2T_2(q-p) - T_1)x_1^2 + -aT_1x_{1t}}{k_1T_2\big((q-p)x_1 + a(p-1) + (1-q)x_{1t}\big)} + \\ + \frac{\Big((a + x_{1t})T_1 + k_2T_2\big((1-q)x_{1t} + a(p-1)\big)\Big)x_1}{k_1T_2\big((q-p)x_1 + a(p-1) + (1-q)x_{1t}\big)}. \tag{1-89}$$

В частности, при $x_{1t} = a$ особое управление примет вид

$$U_{oc} = \frac{(k_2T_2(q-p) - T_1)x_1 + aT_1}{k_1T_2(q-p)}, \tag{1-90}$$

а при $x_{1t} = 0$ особое управление примет вид

$$U_{oc} = \frac{x_1\big((k_2pT_2 - T_1)(a - x_1) + k_2T_2(qx_1 - a)\big)}{k_1T_2\big((q-p)x_1 + a(p-1)\big)}. \tag{1-91}$$

Ранее было показано (см. рис. 1.16, 1.18, 1.20), что особое управление может обеспечивать асимптотическую устойчивость точки экстремума статической характеристики объекта. В случаях, когда требуется устойчивость положения равновесия объекта управления в точке, отличной от экстремальной, можно ввести дополнительное управляющее воздействие W как аддитивную добавку к особому управлению U_{oc}.

Пусть в положении равновесия по окончании переходного процесса координаты объекта (1-86) равны: $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0,\ \ x_1 = x_{1T}$, $x_2 = x_{2T}$. Запишем систему (1-86) с управлением $(U_{oc} + W)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{k_1(U+W) - k_2 x_1}{T_1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k_3|x_1 - a|^q + b - x_2}{T_2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{k_1(U_{oc}+W) - k_2 x_{1T}}{T_1}, \\ 0 = \dfrac{k_3|x_{1T} - a|^q + b - x_{2T}}{T_2}. \end{cases} \quad (1\text{-}92)$$

Подставляя особое управление (1-89) в (1-92), находим дополнительное управляющее воздействие

$$W = \frac{T_1(-x_{1T}^2 + (x_{1t}+a)x_{1T} - a x_{1t})}{k_1 T_2\big((q-p)x_{1T} + a(p-1) + (1-q)x_{1t}\big)}, \quad (1\text{-}93)$$

которое не зависит от текущих координат объекта управления, а определяется только его параметрами и координатами конечной точки.

Данное управление $U = U_{oc} + W$ стабилизирует систему в точке (x_{1T}, x_{2T}), если эта точка является устойчивым узлом. Для параметров $a = 0.5$, $b = 0.1$, $k_3 = 2$, $p = 1$, $q = 2$, $x_{1T} = 0.2$, $x_{1t} = 0$, $T_1 = T_2 = 1$ фазовые траектории системы (1-86) под действием особого управления (1-89) и дополнительного управляющего воздействия (1-93) представлены на рис. 1.22, для параметров $a = 0$, $b = 0.2$, $k_3 = -1$, $p = 0$, $q = 0.4$, $x_{1T} = 0.2$, $x_{1t} = 0$, $T_1 = T_2 = 1$ – на рис. 1.23.

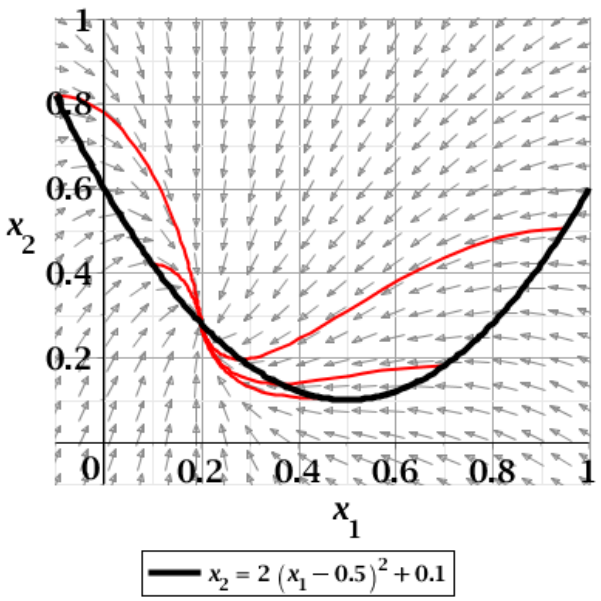

Рис. 1.22. Устойчивые траектории при $x_{1T} = 0.2$, $q = 2$

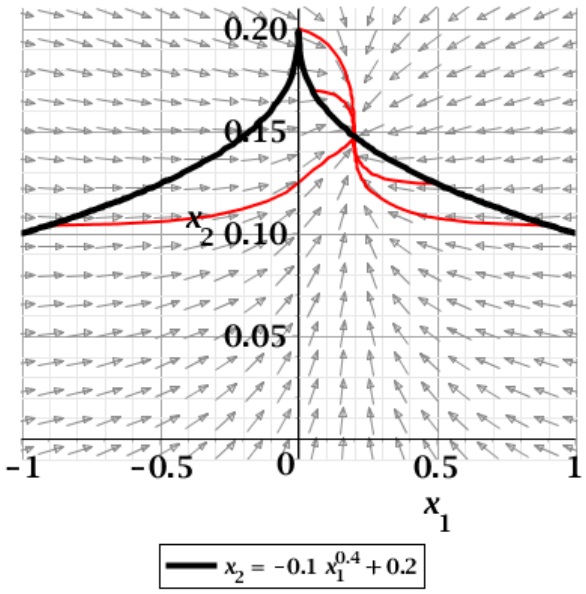

Рис. 1.23. Устойчивые траектории при $x_{1T} = 0.2$, $q = 0.4$

1.2.4.2. Нестационарные объекты

Для объекта

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{k_1 U - k_2 x_1}{T_1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{k_3 |x_1 - a - c\,sin\,t|^q + b - x_2}{T_2} \end{cases} \tag{1-94}$$

и критерия

$$I = \int_0^T x_1^p dt$$

особое управление имеет вид

$$U_{oc} = \frac{x_1\left(k_2 T_2\big((p-1)(a + c\,sin\,t) + x_1(q-p)\big)\right)}{k_1 T_2(p(a - x_1) + c(p-1)\,sin\,t + qx_1 - a)} + \\ + \frac{x_1\left(T_1\big(a - x_1 + c(sin\,t + (q-1)T_2\,cos\,t)\big)\right)}{k_1 T_2(p(a - x_1) + c(p-1)\,sin\,t + qx_1 - a)}. \tag{1-95}$$

По условиям (1-92) находится дополнительное управляющее воздействие

$$W = -\frac{T_1 x_{1T}\big(a + c\,sin\,t - x_{1T} + \mathrm{c}T_2\,cos\,t\,(q-1)\big)}{k_1 T_2\big((q-p)x_{1T} + (p-1)(a + c\,sin\,t)\big)}, \tag{1-96}$$

которое совместно с особым управлением обеспечивает устойчивость объекта в произвольной конечной точке, если эта точка является устойчивым узлом. Для параметров $a = 0.5$, $b = 0.25$, $c = 0.1$, $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $k_3 = -1$, $p = 1$, $q = 2$, $x_{1T} = 0.3$, $T_1 = T_2 = 1$ фазовые траектории системы (1-94) под действием особого управления (1-95) и дополнительного управляющего воздействия (1-96) представлены на рис. 1.24.

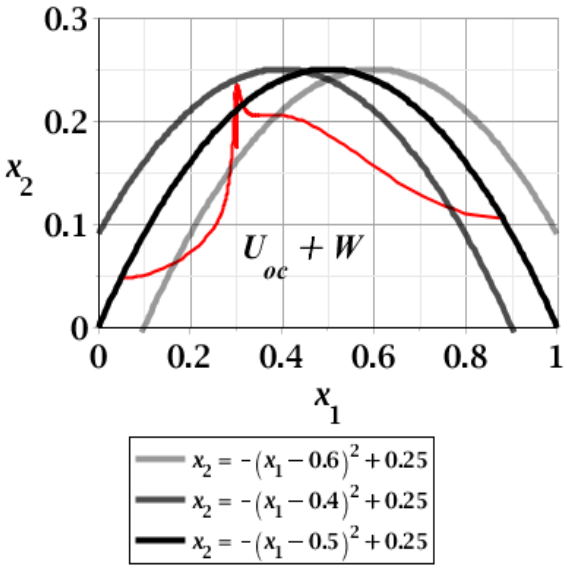

Рис. 1.24. Устойчивость объекта при $x_{1T} = 0.3$, $q = 2$

Таким образом, аналитическим путем и моделированием показано, что вводимое из решений оптимальных задач на минимум ресурсов особое управление для экстремальных стационарных и нестационарных объектов обеспечивает асимптотическую устойчивость и отслеживание дрейфа произвольных состояний равновесия, заданных на статической характеристике объекта.

2. АЛГОРИТМЫ И СТРУКТУРЫ СИСТЕМ ОСОБОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИМИ УСТАНОВКАМИ

2.1. ПОЛЮСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЕМ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Рассматривается оптимальное управление скоростью электродвигателя постоянного тока по цепи возбуждения (так называемое полюсное регулирование скорости) с переменными критериями оптимальности по быстродействию и на минимум отклонений координат, и проводится синтез структур управляющих устройств для реализации оптимального и квазиоптимального управлений.

Электропривод постоянного тока с управляемым потоком возбуждения при постоянном напряжении якорной цепи описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [113, 135]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = bU + a_{11}x_1, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2x_1^2 + \mu(x_2), \end{cases} \tag{2-1}$$

в которой координаты x_1 и x_2 характеризуют: x_1 – сигнал с выхода датчика о токе возбуждения, x_2 – сигнал с выхода датчика об угловой скорости двигателя; управление U соответствует напряжению на входе усилителя мощности в цепи обмотки возбуждения. Параметры модели a_{11}, a_{21}, a_{22}, b определяются из конструктивных данных двигателя, безынерционных датчиков и усилителя и совместного решения уравнений:

– движения привода $J\frac{d\omega}{dt} = M_{\text{д}} - M_{\text{с}}$,

– электрического баланса напряжений якорной цепи $U_{\text{я}} = k\Phi\omega + I_{\text{я}}R_{\text{я}}$,

– электромагнитного момента двигателя $M_{\text{д}} = k\varphi I_{\text{я}}$,

– электрического баланса напряжений цепи возбуждения $U_{\text{в}} = I_{\text{в}}R_{\text{в}} + L_{\text{в}}\frac{dI_{\text{в}}}{dt}$,

– связи магнитного потока и тока возбуждения в линейной зоне кривой намагничивания $\Phi = k_{\text{м}}I_{\text{в}}$.

Приведенный момент сопротивления механизма $\mu(x_2)$ определяется по уравнению $\mu(x_2) = -\frac{M_{\text{с}}}{J}$.

2.1.1. Оптимальное по быстродействию управление

Пусть поставлена задача синтеза оптимального по быстродействию управления: отыскивается допустимое управление $|U| \leq U_{max}$ в функции координат x_1, x_2, переводящее привод из начального состояния $x(0) = (x_{10}, x_{20})$ в конечное $x(T) = (x_{1T}, x_{2T})$ и минимизирующее интегральный функционал

$$I = \int_0^T 1dt, \tag{2-2}$$

$T -$ время перехода – не задано.

Граничные условия $x(0)$ и $x(T)$ задаются на статической характеристике привода, получаемой приравниванием нулю второго уравнения в системе (2-1)

$$x_2 = -\frac{a_{21}x_1 + \mu(x_2)}{a_{22}x_1^2}.$$

Статической характеристикой является экстремальная кривая S (см. рис. 2.1). Рабочим участком статической характеристики, обладающим статической устойчивостью, является ветвь, лежащая правее точки экстремума $x_Э$ с координатами

$$x_{1Э} = -\frac{2\mu}{a_{21}}, \qquad x_{2Э} = \frac{a_{21}^2}{4a_{22}\mu}.$$

Известные системы подчиненного регулирования координат электродвигателя по цепи возбуждения имеют низкое быстродействие. Использование скользящего режима движения вдоль особой траектории [135] позволяет повысить быстродействие, однако предельного быстродействия при этом не достигается, а реализация скользящего режима вызывает нежелательные вибрации управления и координат.

Определение существования особого режима, вычисление особой траектории и непрерывного особого управления, ее реализующего, проводится с помощью условий общности положения для нелинейных объектов в пространстве $R_n = R_2$ координат x_1, x_2.

Вычисляя векторы B_1, B_2 по соотношению (1-5) и приравнивая детерминант матрицы $D_2 = (\,B_1 \quad B_2\,)$ нулю, определяем уравнение особой траектории

$$x_2 = -\frac{a_{21}}{2a_{22}x_1}, \qquad (2\text{-}3)$$

которая показана на рис. 2.1 кривой S_1. Особая траектория пересекается со статической характеристикой в точке экстремума $x_Э$.

Оптимальное особое управление, реализующее особую траекторию, может быть определено из совместного решения уравнений движения объекта (2-1) и уравнения особой траектории (2-3) или с помощью условий общности положения для нелинейных систем, для чего определяется вектор B_3 по соотношению (1-5), а затем из детерминанта матрицы $D_2^1 = (B_1 \quad B_3)$ после приравнивания нулю вычисляется особое управление функции координат x_1, x_2

$$U_{oc}(x_1, x_2) = \frac{a_{11}a_{21} - a_{21}a_{22}x_1^2 - 2a_{22}x_1\mu(x_2)}{2a_{22}bx_2},$$

из которого с учетом уравнения особой траектории (2-3) получается особое управление в функции координаты x_1

$$U_{oc}(x_1) = \frac{a_{21}a_{22}x_1^3 + 2a_{22}x_1^2\mu(x_2) - a_{11}a_{21}x_1}{a_{21}b}. \qquad (2\text{-}4)$$

Следует отметить, что особое управление можно получить и из уравнения для $det\, D_2^2 = det\ (B_2 \quad B_3) = 0$, причем все особые управления, хотя и имеют различные функциональные зависимости, поддерживают одинаковую скорость движения по особой траектории. Выбор функциональной зависимости определяется сложностью ее реализации.

На рис. 2.1 кривыми АВСД и ДЕА показаны фазовые траектории привода для реализации оптимального по быстродействию управления. В зависимости от граничных условий $x(0)$, $x(T)$, принадлежащих статической характеристике S, изменяется число интервалов оптимального по быстродействию управления. В режиме разгона для получения большого перепада угловых скоростей $x_{2T} \gg x_{20}$ траектория состоит из трех участков. АВ – участок движения при управлении $U = -U_{max}$, ВС – участок движения по особой траектории S_1 под особым управлением U_{oc}, СД – участок движения при $U = +U_{max}$; в режиме разгона до меньших скоростей $x_{2T} > x_{20}$ оптимальная траектория состоит из двух участков с управлениями

$U = -U_{max}$ и $U = +U_{max}$. В режиме торможения для получения $x_{2T} < x_{20}$ траектория всегда состоит из двух участков: ДЕ – участок движения: при $U = +U_{max}$, ЕА – участок движения при $U = -U_{max}$.

В оптимальной замкнутой системе управляющее воздействие формируется на основе информации об отклонениях координат двигателя от оптимальной траектории. Траектории СД и АЕ (рис. 2.1), на которых лежат конечные состояния $x(T)$, аппроксимируются параболическим уравнением

$$x_2 = ax_1^2 + bx_1 + c,$$

где a, b, c – коэффициенты аппроксимации фазовых траекторий, проходящих через конечные точки А и Д при управлениях $U = \pm U_{max}$. Значение коэффициентов a, b, c зависит от величины заданной скорости x_{2T}, а также координаты точки переключения на конечный участок траектории – точки С или Е, координата точки переключения однозначно определяется величиной x_{2T}.

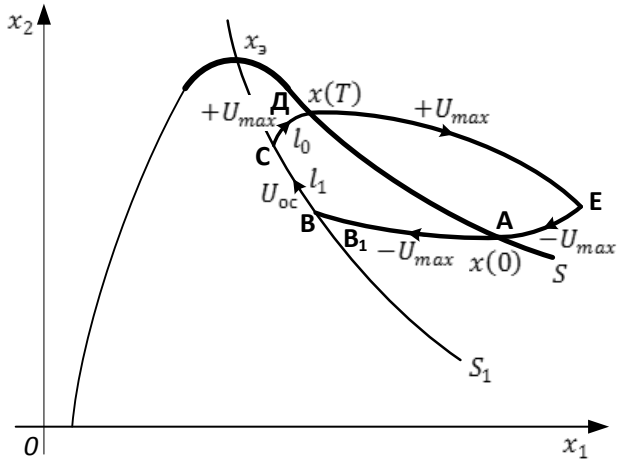

Рис. 2.1. Траектории оптимального по быстродействию управления

Отклонения движения системы от участков оптимальной траектории оцениваются функциями:

– для особой траектории:

$$l_1 = x_2 + \frac{a_{21}}{2a_{22}x_1},$$

– для траектории, проходящей через конечную точку:

$$l_0 = x_2 - ax_1^2 - bx_1 - c.$$

Структурная схема оптимальной системы управления показана на рис. 2.2. Для реализации требуемых оптимальных по быстродействию последовательностей управляющих воздействий U, зависящих от граничных условий $x(0)$, $x(T)$ и текущих значений координат x_1, x_2, формируется переменная структура управления по отклонению вида:

$$U = \begin{cases} U_p, & i = 0, \\ U_{oc}, & i = 1, \end{cases} \tag{2-5}$$

где $U_p = U_{max}\, sign\, l_0$ – релейное управление, вырабатываемое нелинейным элементом НЭ;

U_{oc} – особое управление (2-4), формируемое функциональным преобразователем ФП;

i – выходной сигнал логического блока ЛБ.

Значение сигнала i и, следовательно, алгоритм управления (2-5) зависят от координат привода относительно особой траектории и траектории, проходящей через конечную точку $x(T)$. Логический блок ЛБ вырабатывает сигнал i:

$$i = \begin{cases} 1, & (l_1 \leq 0) \cap (l_0 < 0), \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{2-6}$$

где $\cap$ – оператор логического умножения, что следует из топологии траекторий, характеризуемой в зависимости от сигналов $l_1 \leq 0$ и $l_0 < 0$ таблицей истинности (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Таблица истинности для ЛБ

$l_0 < 0$	$l_1 \leq 0$	i
Да	Нет	0
Да	Да	1
Нет	Да	0
Нет	Нет	0

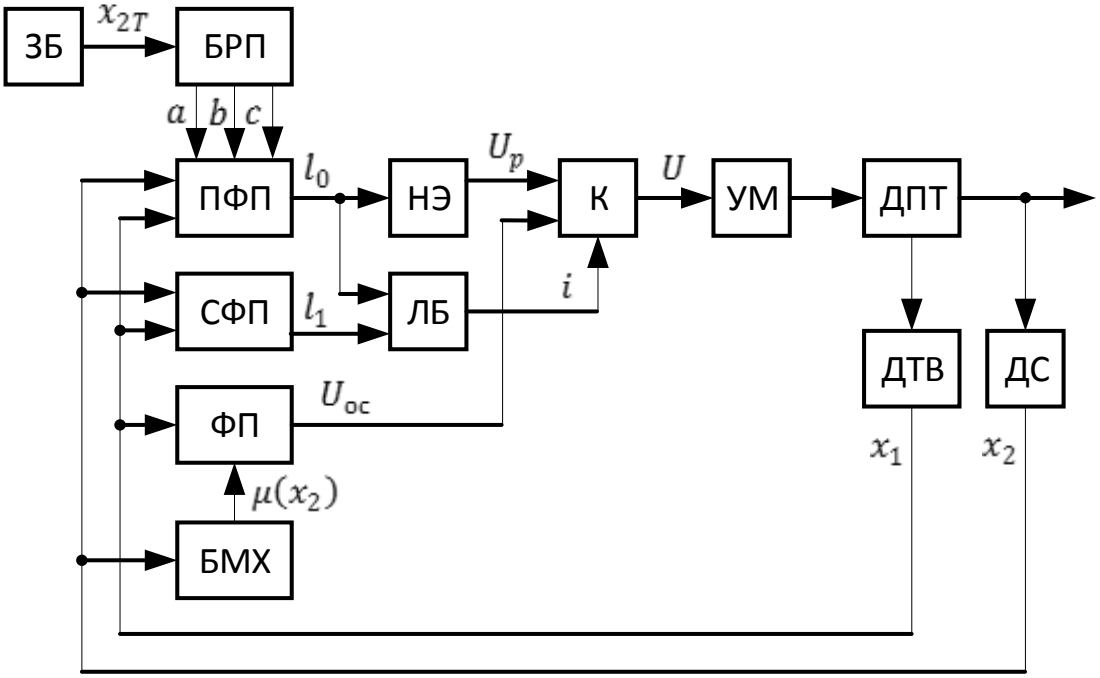

Рис. 2.2. Структурная схема оптимальной по быстродействию системы

Коммутатор К представляет собой управляющий контакт, осуществляющий переключение алгоритма управления (2-5), т. е. определяющий прохождение на вход усилителя мощности УМ сигнала U_p от нелинейного элемента НЭ или сигнала U_{oc} от функционального преобразователя ФП в зависимости от сигнала i логического блока ЛБ.

Работа оптимальной системы происходит следующим образом. Пусть начальной точке $x(0)$ соответствует точка А на рис. 2.1, а конечной точке $x(T)$ – точка Д. При поступлении на вход блока расчета параметров БРП задающего воздействия x_{2T} БРП вырабатывает значения параметров a, b, c и производит настройку перестраиваемого функционального преобразователя ПФП. Сигналы с датчиков ДТВ и ДС поступают на входы функциональных преобразователей. Функциональные преобразователи ПФП и СФП производят расчет текущих значений отклонений $l_0 < 0$ и $l_1 > 0$, подающихся на входы нелинейного элемента НЭ и логического блока ЛБ. На выходе логического блока формируется сигнал $i = 0$, поступающий на управляющий вход коммутатора К, при этом к входу усилителя мощности УМ подключается управление $U = U_p = -U_{max}$. Электродвигатель приходит в движение, соответствующее перемещению изображающей точки (x_1, x_2) по отрезку АВ (см. рис. 2.1). По мере разгона изображающая точка совпадает с точкой В, выполняются условия $l_1 = 0$, $l_0 < 0$, на выходе логического блока ЛБ формируется сигнал $i = 1$,

коммутатор К подключает к усилителю УМ особое управление U_{oc} с функционального преобразователя ФП, при этом изображающая точка перемещается по особой траектории ВС. В точке С выполняется условие $l_0 = 0$, логический блок вырабатывает сигнал $i = 0$, коммутатор К производит подключение по входу усилителя управления $U = +U_{max}$ с выхода нелинейного элемента НЭ, изображающая точка (x_1, x_2) движется по отрезку СД до попадания в точку Д, где $x_2 = x_{2T}$.

При разгоне до меньших значений угловой скорости, когда на первом интервале управления $U = -U_{max}$ траектории не входят в область $l_1 \leq 0$, или в режиме торможения привода система работает под воздействием только релейного управления $U_p = U_{max} \operatorname{sign} l_0$.

При необходимости выполнения условия ограничения по управлению $|U_{oc}| \leq U_{max}$ на выходе функционального преобразователя ФП следует включить нелинейный элемент типа «насыщение». Это вызовет скользящий режим движения вдоль особой траектории. Однако ситуация $|U_{oc}| > U_{max}$ возможна только в зоне низких угловых скоростей привода, в которой регулирование по цепи возбуждения не применяется.

В качестве элементной базы для аппаратной реализации управляющего устройства могут быть использованы аналоговые и цифровые интегральные микросхемы. Блок расчета параметров БРП, перестраиваемый функциональный преобразователь ПФП, стационарный функциональный преобразователь СФП, функциональный преобразователь ФП выполняются на операционных усилителях с нелинейным коэффициентом передачи.

Задающий блок ЗБ и блок механической характеристики БМХ могут реализовываться аналогичным образом на нелинейных блоках, но в конкретных производственных механизмах структура этих блоков может быть упрощена.

Получение сложных нелинейных уравнений упрощается при использовании перемножителей. Современные интегральные перемножители и операционные усилители дополняют друг друга, а их комбинации позволяют реализовать практически любые операции над аналоговыми сигналами.

Логический блок ЛБ реализуется с помощью аналоговых компараторов и комбинационной логической схемы на цифровых микросхемах. Для реализации коммутатора К применяются аналоговые коммутаторы.

2.1.2. Совмещенная система с оптимальным по быстродействию управлением и стабилизацией конечных координат

Управляющая последовательность вида (2-5) обеспечивает за минимальное время переход из начальной точки $x(0)$ в конечную точку $x(T)$. После того как электропривод переведен в конечную точку $x(T)$, необходимо застабилизировать конечные координаты x_{1T} и x_{2T}, т. е. придать конечным координатам асимптомическую устойчивость, получение которой не входит в задачу оптимального по быстродействию управления.

Для синтеза управления, обеспечивающего стабилизацию конечных координат, рассмотрим асимптотику траекторий электропривода (2-1) при особом оптимальном управлении (2-4) с помощью методов качественного исследования динамических систем [12].

Система (2-1) уравнений движения электропривода при особом управлении (2-4) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = bU_{oc} + a_{11}x_1 = a_{22}x_1^3 + 2\dfrac{a_{22}}{a_{21}}x_1^2\mu(x_2) = Q(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2x_1^2 + \mu(x_2) = P(x_1, x_2). \end{cases} \tag{2-7}$$

Особой точкой (или состоянием равновесия) системы (2-7), в которой правые части системы (2-7) равны нулю, т. е. $P(x_1, x_2) = Q(x_1, x_2) = 0$, является точка с координатами

$$x_1 = -\frac{2\mu(x_2)}{a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{21}^2}{4a_{22}\mu(x_2)},$$

совпадающая с точкой экстремума статической характеристики $x_Э$. Другое решение $x_1 = 0$, получаемое из уравнения $Q(x_1, x_2) = 0$, не удовлетворяет уравнению $P(x_1, x_2) = 0$ при $\mu(x_2) \neq 0$.

Характер особой точки $x_Э$ определяется с помощью параметров $\Delta(x_Э)$, $\sigma(x_Э)$, равных

$$\Delta(x_3) = \begin{vmatrix} Q'_{x_1}(x_Э) & Q'_{x_2}(x_Э) \\ P'_{x_1}(x_Э) & P'_{x_2}(x_Э) \end{vmatrix} = 4\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э)\mu'_{x_2}(x_Э) + 16\frac{a_{22}^2}{a_{21}^4}\mu^4(x_Э),$$

$$\sigma(x_3) = Q'_{x_1}(x_Э) + P'_{x_2}(x_Э) = \mu'_{x_2}(x_Э) + 8\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э).$$

Характеристическое уравнение системы (2-7) в окрестности точки $x_Э$ через параметры $\Delta(x_Э)$ и $\sigma(x_Э)$ примет вид

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = \lambda^2 - \left(\mu'_{x_2}(x_Э) + 8\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э)\right)\lambda +$$

$$+4\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э)\mu'_{x_2}(x_Э) + 16\frac{a_{22}^2}{a_{21}^4}\mu^4(x_Э) = 0,$$

откуда получаются характеристические корни

$$\lambda_1 = 4\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э), \lambda_2 = \mu'_{x2}(x_Э) + 4\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э).$$

Из полученных характеристических корней λ_1, λ_2 следует, что состояние равновесия $x_Э$ системы (2-7) в большинстве случаев имеет характер устойчивого узла, так как корень λ_1 всегда отрицателен, а корень λ_2 в большинстве случаев отрицателен, потому что слагаемое $\mu'_{x2}(x_Э)$ может быть положительным только при нелинейно-спадающей механической характеристике производственного механизма, однако даже в последнем случае для того, чтобы корень λ_2 был положителен и положение равновесия приняло характер седла, т. е. стало бы неустойчивым, необходимо выполнение условия

$$|\mu'_{x2}(x_Э)| > \left|4\frac{a_{22}}{a_{21}^2}\mu^2(x_Э)\right|.$$

Коэффициенты направлений траекторий системы (2-7) вблизи состояния равновесия $x_Э$ равны:

$$k_1 = \frac{\lambda_1 - Q'_{x1}(x_Э)}{Q'_{x2}} = \begin{cases} \frac{0}{0}, & \mu(x_2) = const, \\ \infty, & \mu(x_2) \neq const, \end{cases}$$

$$k_2 = \frac{\lambda_2 - Q'_{x1}(x_Э)}{Q'_{x2}} = \frac{0}{0}.$$

Итак, проведенное качественное исследование траекторий движения электропривода (2-1) при особом управлении (2-4) показывает, что особая точка системы (2-7), совпадающая с точкой $x_Э$ экстремума

статической характеристики электропривода, имеет характер устойчивого узла; при постоянной механической характеристике производственного механизма особая точка имеет характер дикритического узла, так как $\lambda_1 = \lambda_2$, $k_1 = k_2 = \frac{0}{0}$, когда каждая траектория имеет свое направление при подходе к особой точке; при других механических характеристиках особая точка имеет характер невырожденного узла, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, траектории системы вблизи особой точки имеют угловой коэффициент, определяемый коэффициентом $k_1 = \infty$.

Основной вывод, который следует из проведенного анализа: траектории электропривода при особом управлении, необходимом для получения оптимального быстродействия, асимптотически устойчивы и стремятся к точке экстремума статической характеристики электропривода (рис. 2.3).

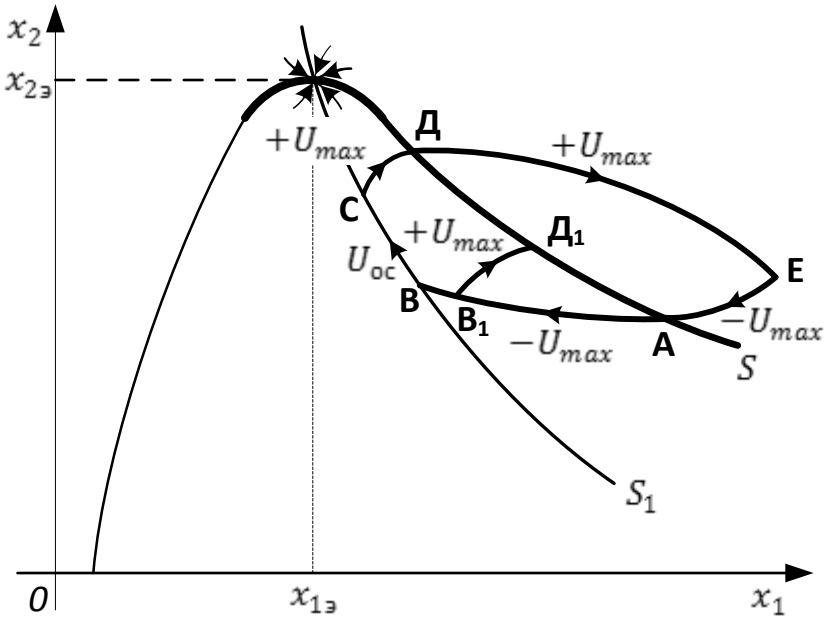

Рис. 2.3. Траектории электропривода с особым управлением

Этот вывод важен для синтеза системы стабилизации конечных координат электропривода $x(T) = (x_{1T}, x_{2T})$, так как если известно управление, обеспечивающее устойчивость положения равновесия исходной системы (2-7), то можно построить систему стабилизации с добавкой управления $W\big(x(T)\big)$, такой, чтобы состоянием равновесия системы стабилизации служила конечная точка $x(T)$.

Такая система стабилизации для исходной системы (2-1) при особом управлении (2-4) с добавкой управления $W(x(T))$ примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = b(U_{oc} + W\big(x(T)\big) + a_{11}x_1 = \\ = b\left(\dfrac{a_{22}a_{21}x_1^3 + 2a_{22}\mu(x_2)x_1^2 - a_{21}a_{11}x_1}{a_{21}b} + W\right) + a_{11}x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_1^2x_2 + \mu(x_2), \end{cases} \tag{2-8}$$

где $U_{oc} + W\big(x(T)\big) = U_{\text{ст}}$ – управление для стабилизации конечных координат электропривода.

Для системы стабилизации (2-8) необходимо найти добавку управления $W\big(x(T)\big)$, такую, чтобы особой точкой системы (2-8) являлась конечная точка $x(T)$, т. е. выполнялось условие

$$\frac{dx_1}{dt}\big(x(T)\big) = 0, \qquad \frac{dx_2}{dt}\big(x(T)\big) = 0,$$

тогда

$$W\big(x(T)\big) = -\frac{a_{22}}{b}x_{1T}^3 - 2\frac{a_{22}}{a_{21}b}x_{1T}^2\mu(x_{2T}). \tag{2-9}$$

Для проверки асимптотики траекторий системы стабилизации (2-8) с учетом уравнения особого управления (2-4) с добавкой управления $W\big(x(T)\big)$ (2-9), учитывающей конечные координаты электропривода, вычисляются характеристические корни:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu'_{x_2}(x_{2T})}{2} + 2a_{22}x_{1T}^2 + 2\frac{a_{22}}{a_{21}}\mu(x_{2T})x_{1T} \pm$$
$$\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\mu'_{x_2}(x_{2T}) - a_{22}x_{1T}^2 - 2\frac{a_{22}}{a_{21}}\mu(x_{2T})x_{1T}\right)^2 - 2(\mu'_{x_2}(x_{2T}))^2}. \tag{2-10}$$

По полученным в общем виде характеристическим корням трудно оценить характер произвольно заданного состояния равновесия $x(T)$. Очевидно, такую оценку необходимо проводить в каждом конкретном случае для известных коэффициентов электродвигателя и заданной механической характеристики производственного механизма.

Например, в случае момента сопротивления, не зависящего от скорости $\mu(x_2) = \text{const}$, характеристические корни λ_1, λ_2 из (2-10) равны

$$\lambda_1 = a_{22}x_{1T}^2, \qquad \lambda_2 = 3a_{22}x_{1T}^2 + 4\frac{a_{22}}{a_{21}}\mu(x_{2T})x_{1T}.$$

С учетом знаков коэффициентов электродвигателя $a_{22} < 0$, $a_{21} > 0$, $\mu(x_2) < 0$ получается, что областью асимптотически устойчивых состояний равновесия являются точки статической характеристики, удовлетворяющие условию $x_{1T} > -\frac{4\mu}{3a_{21}}$ (рис. 2.4), имеющие в этом случае характер устойчивого узла. При $x_{1T} < -\frac{4\mu}{3a_{21}}$ состояния равновесия на статической характеристике S неустойчивы и имеют характер седла. Траектории системы стабилизации (2-4) при $\mu(x_2) = \text{const}$ стремятся к состояниям равновесия с угловыми коэффициентами

$$k_1 = 0, k_2 = -2\frac{a_{22}}{a_{21}}x_{1T}^2.$$

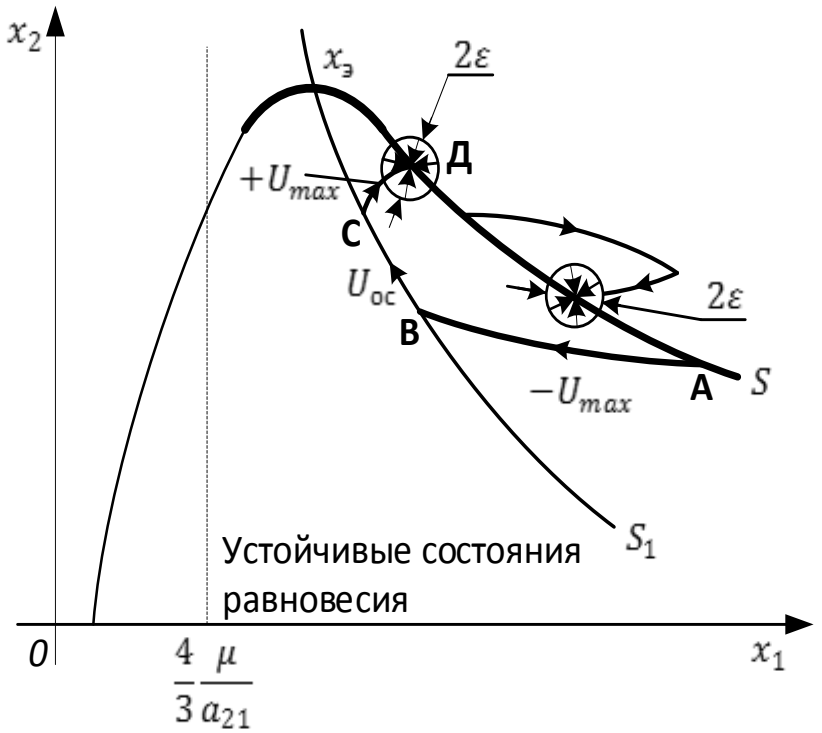

Рис. 2.4. Топология траекторий совмещенной системы

Рассмотренный алгоритм стабилизации конечных координат электропривода с использованием особого оптимального управления реализуется в совмещенной системе, структурная схема которой приведена на рис. 2.5. Управление стабилизации конечных координат $U_{\text{ст}}$, равное сумме особого оптимального управление U_{oc} (2-4), обеспечивающего оптимальное быстродействие, и добавки управления

$W(x(T))$ (2-9), зависящей от конечных координат, вырабатывается вторым сумматором Σ2, на входы которого подаются выходной сигнал функционального преобразователя ФП1, соответствующий U_{oc}, и выходной сигнал дополнительного функционального преобразователя ФП2, равный $W(x(T))$.

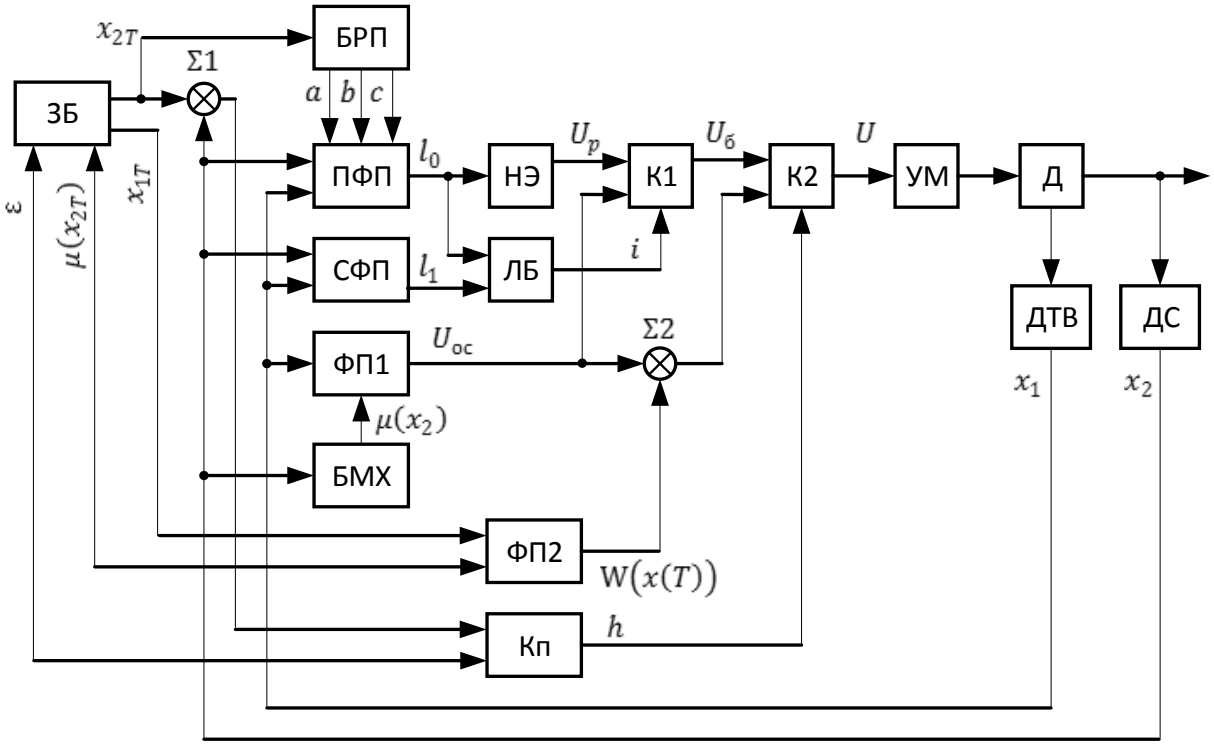

Рис. 2.5. Структурная схема совмещенной системы

Переключение управления U электродвигателя с оптимального по быстродействию управления $U_б$, являющегося выходным сигналом первого коммутатора К1, на управление стабилизации конечных координат $U_{ст}$, снимаемого с выхода второго сумматора Σ2, производится вторым коммутатором К2 по условию

$$U = \begin{cases} U_б, & h = 0, \\ U_{ст}, & h = 1. \end{cases}$$

Управляющий сигнал h для переключения второго коммутатора К2 получается на компараторе Кп, который оценивает отклонение модуля разности $|x_2 - x_{2T}|$ текущего значения скорости x_2 и конечной скорости x_{2T} от заданной величины зоны стабилизации ε, внутри которой включается управление стабилизации конечных координат $U_{ст}$, а вне зоны включено оптимальное по быстродействию управление $U_б$. Сигнал h равен

$$h = \begin{cases} 0, & |x_2 - x_{2T}| > \varepsilon, \\ 1, & |x_2 - x_{2T}| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Разность $|x_2 - x_{2T}|$ снимается с первого сумматора Σ1, а сигнал зоны стабилизации ε определяется задающим блоком ЗБ, с которого выдаются также конечная координата x_{1T} и момент сопротивления $\mu(x_{2T})$ для формирования добавки управления $W(x(T))$ в соответствии с уравнением (2-9) на дополнительном функциональном преобразователе ФП2.

Введение сигнала зоны стабилизации ε необходимо для того, чтобы производить стабилизацию конечных координат электродвигателя не только при равенстве текущей координаты x_2 конечной x_{2T}, т. е. при условии $x_2 - x_{2T} = 0$, но и в некоторой окрестности конечной координаты $|x_2 - x_{2T}| \leq \varepsilon$, тем самым можно выполнить такие показатели переходного процесса, как время регулирования и перерегулирование.

Рассмотрим работу устройства в режиме перехода электропривода из точки А с начальными координатами $x(0) = (x_{10}, x_{20})$ в точку Д с конечными координатами $x(T) = (x_{1T}, x_{2T})$ (см. рис. 2.4), что соответствует разгону электропривода при большом перепаде скоростей $x_{2T} \gg x_{20}$, когда для получения оптимального быстродействия необходимо включать интервал особого управления на отрезке ВС. Задачей устройства является обеспечение перехода за минимальное время из точки А в окрестность радиуса ε точки Д с последующей стабилизацией координат точки Д.

Сигнал конечного значения скорости x_{2T}, вырабатываемый задающим блоком ЗБ, на первом сумматоре Σ1 сравнивается с начальным значением скорости x_{20}, снимаемым с датчика скорости ДС вращения электродвигателя. Модуль разности скоростей $|x_{2T} - x_{20}|$ сравнивается компаратором Кп с величиной зоны стабилизации ε, поступающей с задающего блока ЗБ. Если модуль разности $|x_{2T} - x_{20}| > \varepsilon$, то компаратор Кп вырабатывает сигнал $h = 0$, при котором ко входу усилителя мощности УМ вторым коммутатором К2 подключается оптимальное по быстродействию управление $U_б$ с выхода первого коммутатора К1.

По сигналу конечной скорости x_{2T} блок расчета параметров БРП аппроксимации скорости вырабатывает значения параметров a, b, и c для получения уравнения параболы, проходящей через конечную точку Д. По сигналам a, b, и c производится настройка перестраивае-

мого функционального преобразователя ПФП, на входы которого подключаются также сигнал x_2 от датчика скорости ДС и сигнал x_1 от датчика тока возбуждения ДТВ электродвигателя. Выходной сигнал l_0 перестраиваемого функционального преобразователя ПФП в начальной точке А меньше 0, поэтому с выхода нелинейного элемента НЭ снимается релейное уравнение $U_{\text{р}} = U_{max}\,\text{sign}\,l_0 = -U_{max}$. Сигналы с датчиков ДС и ДТВ поступают на входы стационарного функционального преобразователя СФП, который вырабатывает сигнал $l_1 > 0$ отклонения текущих координат x_1, x_2 от особой траектории S_1. По сигналам $l_0 < 0$ и $l_1 > 0$ на выходе логического блока ЛБ формируется сигнал $i = 0$, при котором релейное управление $U_{\text{р}} = -U_{max}$ через первый коммутатор К1 и второй коммутатор К2 подключается ко входу усилителя УМ. Электродвигатель приходит в движение, соответствующее перемещению изображающей точки (x_1, x_2) по отрезку АВ (см. рис. 2.4).

По мере разгона изображающая точка совпадает с точкой Б, при этом сигналы отклонений $l_0 < 0$, $l_1 = 0$, на выходе логического блока ЛБ формируется сигнал $i = 1$, при котором выходной сигнал $U_{\text{б}}$ первого коммутатора К1 повторяет вырабатываемое функциональным преобразователем ФП1 особое управление U_{oc} по сигналу x_1 с датчика тока возбуждения ДТВ и сигналу $\mu(x_2)$ от блока механической характеристики БМХ. Под действием особого управления U_{oc} изображающая точка перемещается по особой траектории ВС. В точке С выполняется условие $l_0 = 0$, логический блок ЛБ вырабатывает сигнал $i = 0$, при этом на выходе первого коммутатора К1 появляется сигнал $U_{\text{б}} = U_p = +U_{max}$, изображающая точка движется по отрезку СД.

При входе изображающей точки $(x_1,\ x_2)$ в -окрестность конечной точки $x(T)$, когда модуль разности $|x_{2T} - x_{20}| \leq \varepsilon$, на выходе компаратора Кп появляется сигнал $h = 1$, при котором второй коммутатор К2 подключает ко входу усилителя УМ управление стабилизации конечных координат $U_{\text{ст}}$, формируемое вторым сумматором Σ2 в виде суммы особого управления U_{oc} от функционального преобразователя ФП1 и добавки управления $W(x(T))$ от дополнительного функционального преобразователя ФП2. Добавка управления $W(x(T))$, зависящая от конечной координаты x_{1T} и момента сопротивления $\mu(x_{2T})$, получается на дополнительном функциональном преобразователе ФП2 по сигналам от задающего блока ЗБ. Под действием управления стабилизации $U_{\text{ст}}$ обеспечивается асимптотическая

устойчивость конечных координат скорости вращения и тока возбуждения электродвигателя.

При разгоне до меньших значений угловой скорости, когда на первом интервале оптимального по быстродействию управления $U_б = U_р = -U_{max}$ траектория изображающей точки не входит в область $l_1 \leq 0$, или в режиме торможения электродвигателя, когда $x_{2T} < x_{20}$ (см. рис. 2.4), оптимальное по быстродействию управление формируется только из интервалов релейного управления $U_б = U_р = U_{max} \operatorname{sign} l_0$. Особое управление U_{oc} в этих случаях не используется для получения оптимального быстродействия, однако оно необходимо для формирования управления стабилизации конечных координат.

Изменением сигнала с задающего блока ЗБ о ширине зоны стабилизации конечных координат электродвигателя можно влиять на такие показатели качества переходного процесса, как время регулирования, перерегулирование, а также обеспечить ограничения на координаты электродвигателя.

2.1.3. Квазиоптимальная система по критериям быстродействия и минимума энергетических затрат

Если в ранее рассмотренной совмещенной системе оптимального по быстродействию управления со стабилизацией конечных координат задать зону стабилизации ε конечных координат электродвигателя больше или равной модулю разности начального и конечного значений скорости вращения электродвигателя, т. е. $\varepsilon \geq |x_{2T} - x_{20}|$, то исключается из управляющей последовательности оптимальное по быстродействию управление, состоящее из интервалов релейного и особого управлений. Переход из начальной координаты электродвигателя в конечную в этом случае осуществляется только под управлением стабилизации конечных координат, равным сумме управлений U_{oc} и $W(x(T))$, по траекториям координат, показанным на рис. 2.6.

Предлагаемый квазиоптимальный алгоритм управления реализуется в системе, структурная схема которой показана на рис. 2.7, путем подачи на вход усилителя мощности УМ сигнала суммы особого управления U_{oc} и добавки управления $W(x(T))$. Суммирование производится сумматором Σ, на входы которого подаются выходной сигнал функционального преобразователя ФП1, соответствующий U_{oc}, и выходной сигнал функционального преобразователя ФП2, равный $W(x(T))$. Функциональный преобразователь ФП1 вырабатывает особое управление U_{oc} в соответствии с уравнением (2-4) по сигналам,

снимаемым с датчика тока возбуждения ДТВ электродвигателя и с блока механической характеристики БМХ производственного механизма, на вход которого подается сигнал с датчика скорости ДС вращения электродвигателя. Добавка управления $W(x(T))$, зависящая от конечной координаты тока возбуждения x_{1T} и момента сопротивления в конечной точке $\mu(x_{2T})$, в соответствии с уравнением (2-9) получается на функциональном преобразователе ФП2 по сигналам от задающего блока ЗБ.

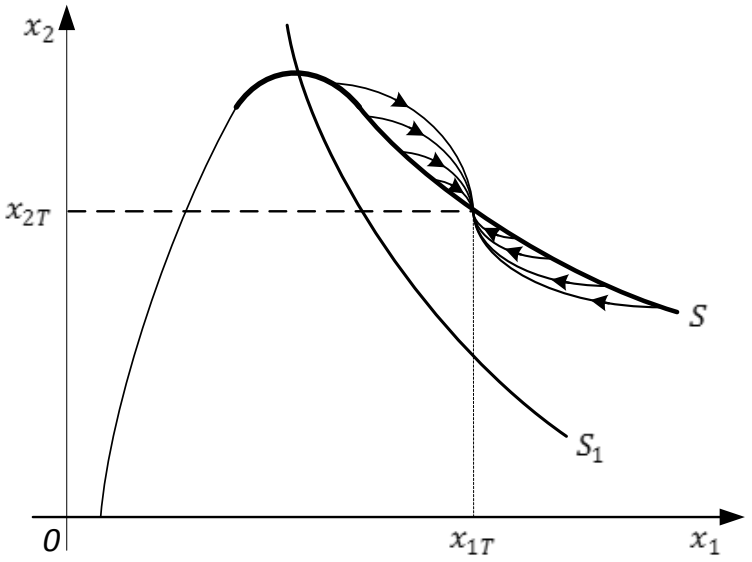

Рис. 2.6. Траектории при квазиоптимальном управлении

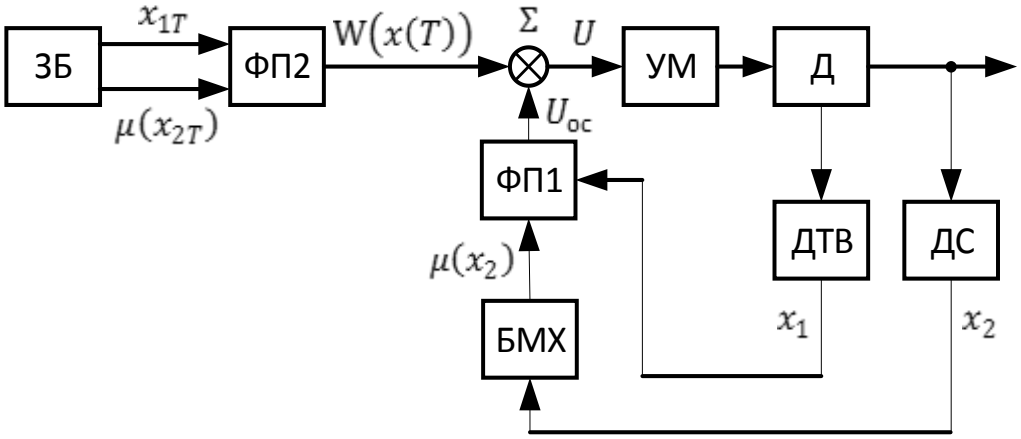

Рис. 2.7. Структура системы с квазиоптимальным управлением

В структуре системы (рис. 2.7) обеспечивается, во-первых, квазиоптимальное по быстродействию управление, что следует из численного расчета переходных процессов при одинаковых граничных условиях в данной системе по сравнению с системой подчиненного

регулирования координат и системой с оптимальным по быстродействию управлением. Результаты сравнительного анализа показаны на рис. 2.8.

Во-вторых, в предлагаемой системе обеспечивается квазиоптимальное управление с минимумом энергетических затрат в цепи возбуждения и цепи якоря.

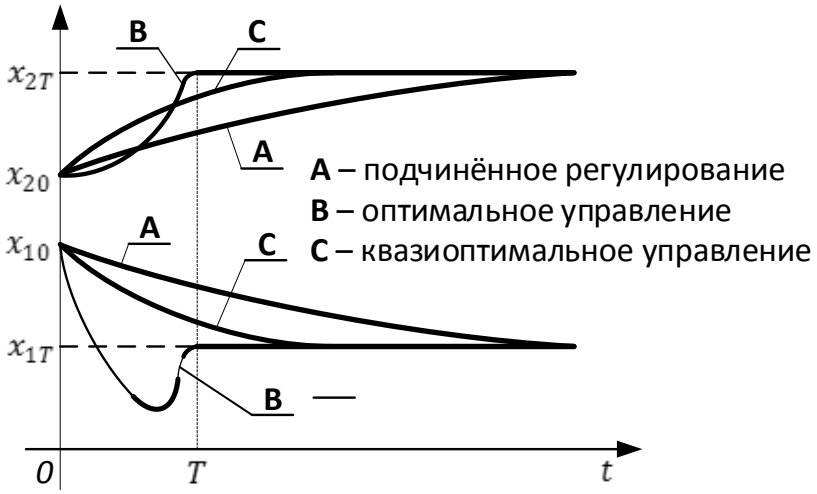

Рис. 2.8. Переходные процессы при различных управлениях

Уменьшение энергетических затрат в цепи возбуждения следует из задачи минимизации критерия

$$I = \int_0^T x_1^2 dt, \tag{2-11}$$

характеризующего энергетические потери в цепи возбуждения двигателя (2-1). Получаемое в этой задаче особое управление имеет тот же вид, что и особое управление (2-4) в задаче быстродействия, однако, в отличие от задачи быстродействия, где особое управление включается в оптимальную управляющую последовательность только на одной особой траектории, в задаче минимизации критерия потерь (2-1I) особое управление должно использоваться во всем пространстве координат.

Улучшение энергетических показателей работы по цепи якоря подтверждается тем, что траектории движения электропривода, реализуемые квазиоптимальной системой, принадлежат области с минимальными затратами в цепи якоря, при этом энергетические потери в цепи якоря с учетом квадратичной зависимости потерь от тока якоря сокращаются примерно в три раза по сравнению с оптимальной по быстродействию системой.

2.2. УПРАВЛЕНИЕ ШАГОВЫМ ЭЛЕКТРОПРИВОДОМ

В данной главе с позиций теории оптимального управления с помощью принципа максимума и УОП для нелинейных объектов рассматривается анализ и синтез управления шаговым электроприводом (ШЭП) и на этой основе показывается построение замкнутых систем управления ШЭП.

Дискретный ШЭП может быть описан при питании фаз шагового двигателя (ЩД) от источника тока или при значительном моменте инерции привода аналоговой моделью в виде нелинейного дифференциального уравнения второго порядка [33]

$$\frac{1}{\Omega_0^2}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{\delta}{\Omega_0}\frac{d\theta}{dt}+\mu_c=sin(\gamma-\theta), \qquad (2\text{-}12)$$

где θ – угол поворота вала ЩД;

γ – задающий угол поворота вектора поля статора;

μ_c – относительное значение момента сопротивления, имеющего реактивный характер, т. е. $\mu_c=|\mu_c|\,\mathrm{sign}\,\dot{\theta}$, $\dot{\theta}={}^{d\theta}/_{dt}$;

Ω_0, δ – соответственно собственная частота колебаний и безразмерное внутреннее демпфирование ШЭП.

Для решения оптимальных задач математическое описание (2-12) с учетом того, что задающий угол поворота вектора поля статора γ изменяется по интегральному закону от частоты управляющих импульсов f, приводится к нормальной форме в виде системы дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1=k_1U, \\ \dot{x}_2=x_3, \\ \dot{x}_3=\Omega_0^2\,sin(x_1-x_2)-\delta\Omega_0x_3-\Omega_0^2\mu_C, \end{cases} \qquad (2\text{-}13)$$

переменные которой обозначают координаты $x_1=\gamma$, $x_2=\theta$, x_3 характеризует скорость ЩД, т. е. $x_3=\dot{\theta}$; k_1 – параметр ЩД, соответствующий дискрете угла поворота; ограниченное по амплитуде управление $-U_{max}\le U\le U_{max}$ соответствует частоте управляющих импульсов f.

Связь между управляющими воздействиями модели U и реального ШЭП f заключается в следующем. При релейном управлении реальным ШЭП, содержащим на входе распределитель импульсов

(РИ), включающий счетчик и дешифратор, управление $U = +U_{max}$ соответствует максимально допустимой частоте управляющих импульсов f_{max}, поступающих на суммирующий вход счетчика РИ, а управление $U = -U_{max}$ соответствует частоте управляющих импульсов f_{max}, поступающих на вычитающий вход счетчика РИ, т. е. знак сигнала управления U соответствует направлению счета в счетчике РИ и, соответственно, направлению вращения или перемещения ШЭП, а частоту управляющих импульсов f при известном аналоговом сигнале управления U можно получить с помощью преобразователя напряжения – частота коммутации (ПНЧ).

Шаговый электропривод находит широкое применение в системах числового программного управления (СЧПУ) станками и роботами. В зависимости от типа СЧПУ по организации траектории движения инструмента к шаговому электроприводу предъявляются различные требования: в позиционных СЧПУ преобладающим является требование минимума времени перехода из одной точки в другую, что соответствует минимизации критерия

$$I = \int_0^T 1dt \to min; \tag{2-14}$$

в контурных СЧПУ основное требование заключается в минимальном отклонении мгновенной скорости ШЭП с критерием

$$I = \int_0^T x_3^2 dt \to min, \tag{2-15}$$

а также представляет интерес требование минимума ошибки заданного положения и отработанного с критерием

$$I = \int_0^T (x_1 - x_2)^2 dt \to min. \tag{2-16}$$

Задача с критерием (2-14) является классической задачей быстродействия, а задачи с критериями (2-15) и (2-16) будем называть задачами минимизации динамической погрешности соответственно по скорости и по положению.

2.2.1. Задача быстродействия

Граничные условия в задаче быстродействия (2-13, 2-14) – начальное $x(0) = (x_{10}, x_{20}) = (\gamma_0, \theta_0)$ и конечное $x(T) = (x_{1T}, x_{2T}) = (\gamma_k, \theta_k)$ – задаются на статической характеристике, получаемой из уравнений объекта (2-13) при условии, что $\dot{x}_2 = x_3 = \dot{x}_3 = 0$. Тогда в координатах x_1, x_2 уравнение статической характеристики примет вид

$$x_2 = x_1 - \arcsin \mu_c,$$

которому соответствуют две прямые $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, получаемые при различных знаках момента сопротивления и показанные на рис. 2.9. Нижняя статическая характеристика $S^{(1)}$ справедлива для случая, когда $\mu_c > 0$, $\dot{\theta} > 0$, $\theta_k > \theta_0$, верхняя статическая характеристика $S^{(2)}$ получена для $\mu_c < 0$, $\dot{\theta} < 0$, $\theta_k < \theta_0$.

Так как поставленная задача быстродействия (2-13, 2-14) линейна по управлению, то, согласно принципу максимума, оптимальным является кусочно-постоянное управление с максимально возможными амплитудами управления на интервалах:

$$H = -1 + \psi_1(k_1 U) + \psi_2 x_3 + \psi_3(\Omega_0^2 \, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2 \mu_c),$$
$$U = |U_{max}| \, sign \, k_1 \psi_1.$$

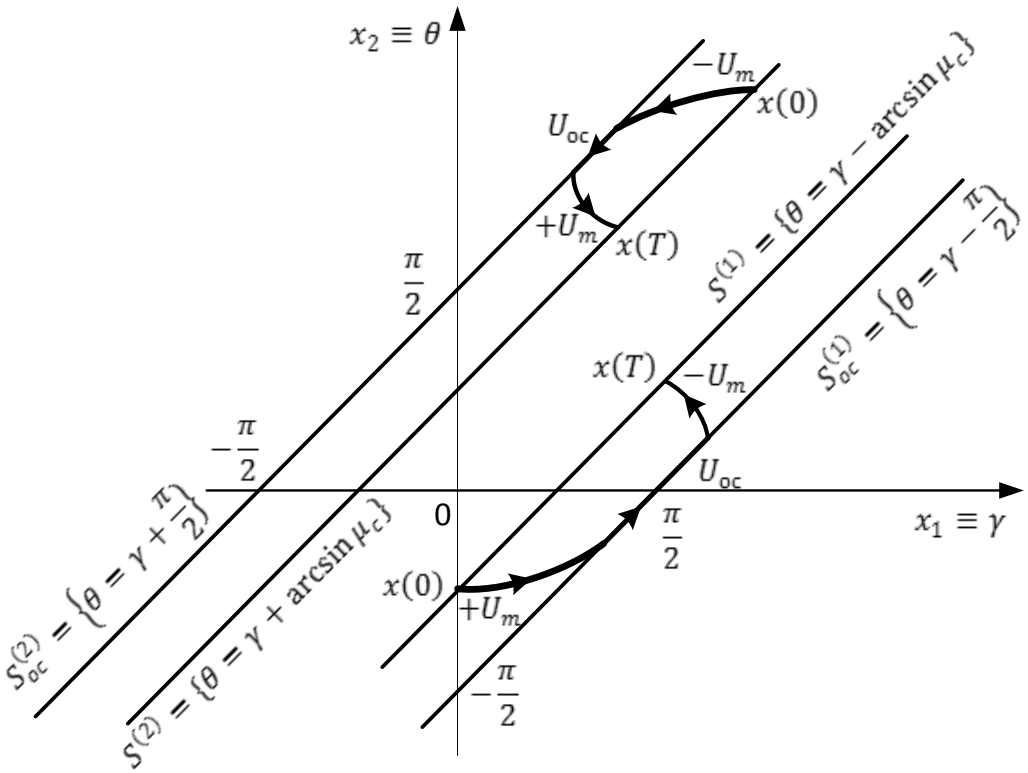

Рис. 2.9. Траектории ШД при оптимальном по быстродействию управлении

Однако ввиду того, что задача (2-13, 2-14) с линейным управлением нелинейна по координатам, в ней возможно существование особой ситуации при $\psi_1 = \dot{\psi}_1 = \ddot{\psi}_2 = \cdots = 0$, когда принцип максимума не позволяет однозначно определить оптимальное управление.

Для анализа существования и вычисления особого управления в задаче быстродействия применим аппарат УОП для нелинейных объектов (см. п. 1.1.1.3), позволяющий получить результаты по особому управлению в явном виде от координат и параметров нелинейного объекта. Запишем уравнения объекта (2-13) с $n = 3$ в векторно-матричной форме

$$\dot{\bar{x}} = A(\bar{x}) + B(\bar{x})U,$$

где

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ \Omega_0^2\, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2 \mu_C \end{pmatrix}, B(\bar{x}) = \begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выполнение УОП определяется по детерминанту матрицы $D_n = D_3$, составленной из векторов B_1, B_2, B_3, вычисленных по рекуррентному соотношению (1-5):

$$det\, D_3 = \begin{vmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_1\Omega_0^2 cos\,(x_1 - x_2) \\ 0 & -k_1\Omega_0^2 cos\,(x_1 - x_2) & -\delta k_1\Omega_0^3 cos(x_1 - x_2) + k_1\Omega_0^2(k_1 U - x_3) sin\,(x_1 - x_2) \end{vmatrix}.$$

Приравнивая детерминант матрицы D_3 нулю, определяем уравнение особой траектории $\cos(x_1 - x_2) = 0$, что в координатах γ, θ соответствует линиям

$$\gamma - \theta = \pm\frac{\pi}{2}, \tag{2-17}$$

показанным на рис. 2.9 линиями $S_{oc}^{(1)}$ и $S_{oc}^{(2)}$.

Для нахождения особого управления в задаче быстродействия, обеспечивающего движение по особым траекториям (2-17), можно воспользоваться различными способами:

– совместно решить систему уравнений объекта (2-13) и уравнение особой траектории (2-17);

– вычислить по соотношению (1-5) дополнительный вектор b_4, а особое управление найти из детерминантов матриц $D_3^1 = (B_1 \quad B_2 \quad B_4)$, $D_3^2 = (B_1 \quad B_3 \quad B_4)$, $D_3^3 = (B_2 \quad B_3 \quad B_4)$;

– приравнять нулю элементы векторов B_j, $j = 2{,}3$ с подстановкой в них уравнения особой траектории (2-17).

Каждый из перечисленных способов дает одинаковый результат по особому управлению

$$U_{oc} = \frac{x_3}{k_1} \text{ или } f = \frac{\dot{\theta}}{k_1}, \tag{2-18}$$

но меньшие вычислительные затраты имеет последний способ.

Физически полученные результаты означают, что для получения максимального быстродействия необходимо поддерживать максимальный момент двигателя, достигаемый на особой траектории при $\gamma - \theta = \pm {}^{\pi}/_{2}$ с помощью обратной связи по скорости двигателя. Фазовые траектории координат двигателя при оптимальном по быстродействию управлении для различных граничных условий показаны на рис. 2.9, а результаты моделирования переходных процессов приведены на рис. 2.10.

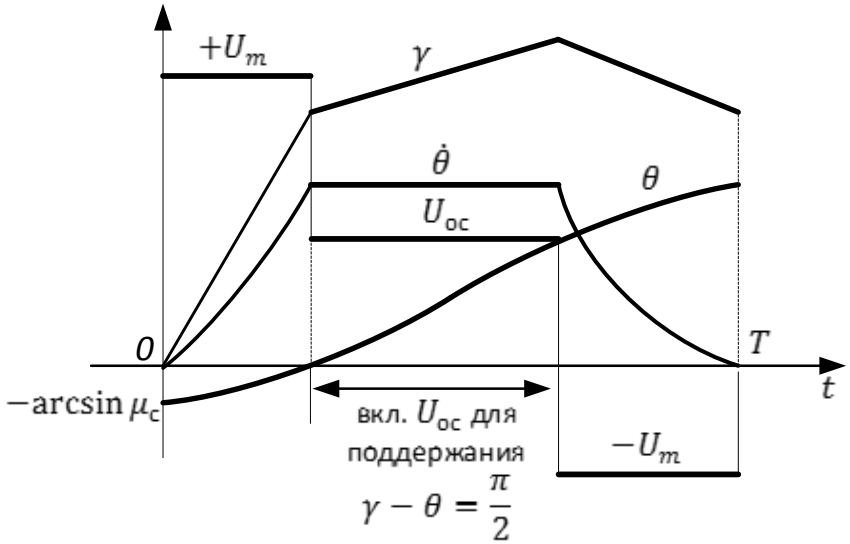

Рис. 2.10. Переходные процессы для оптимального по быстродействию ШД

Для разработки структуры управляющего устройства ШЭП, вырабатывающего необходимые управляющие последовательности оптимального по быстродействию управления, построена топологиче-

ская картина оптимальных траекторий (рис. 2.11), зависящая от граничных условий (γ_0, θ_0), $(\gamma_k, \theta_к)$ и текущих значений координат γ, θ. В обозначениях величин на рис. 2.11 верхний индекс указывает на различные соотношения начального θ_0 и конечного $\theta_к$ положений поля статора. Для случая положительного увеличения конечного положения θ присвоен индекс $^{(1)}$, т. е. $\theta_к^{(1)} > \theta_0^{(1)}$, $\dot{\theta}^{(1)} > 0$; для случая противоположного направления перемещения присвоен индекс $^{(2)}$, при котором $\theta_к^{(2)} < \theta_0^{(2)}$, $\dot{\theta}^{(2)} < 0$. За сепаратрисы топологической картины, позволяющие выделить подпространства с одинаковым требуемым управлением, кроме сигнала отклонения Δ конечного состояния $\theta_к$ относительно начального θ_0

$$\Delta = \begin{cases} 1, & \theta_k > \theta_0, \\ 0, & \theta_k < \theta_0, \end{cases}$$

приняты линии

$$l_п = \theta_п - \theta, l_о = \theta - \gamma \pm \frac{\pi}{2} = \theta - \gamma + \lambda, \lambda = \pm\frac{\pi}{2}.$$

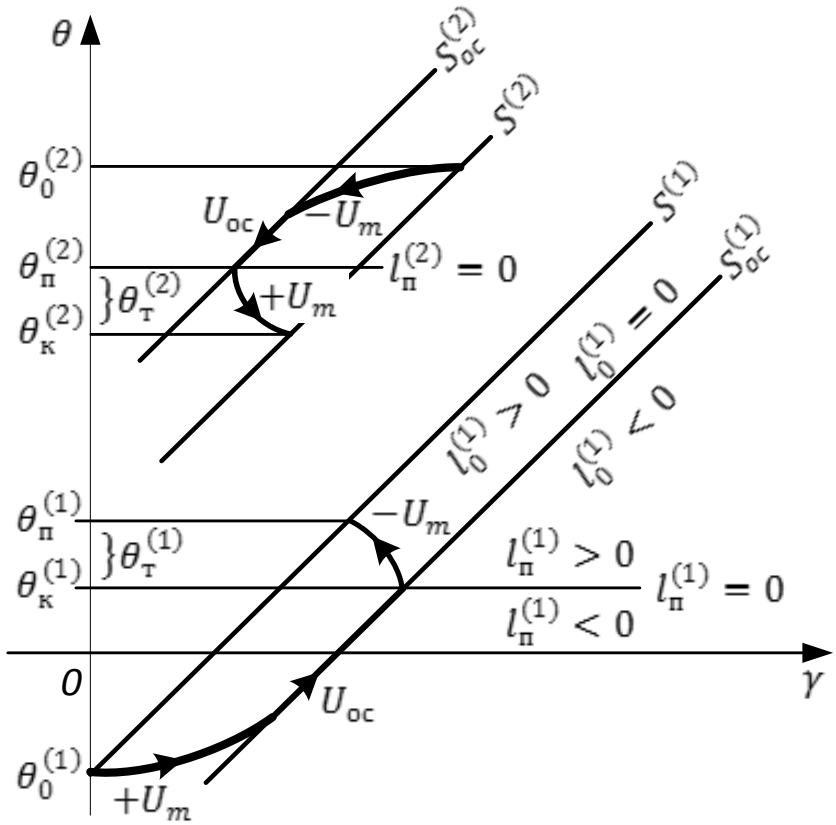

Рис. 2.11. Топология траекторий для оптимального по быстродействию ШД

Линия $l_п$ учитывает переключение с особого управления на релейное, в уравнении для $l_п$ координата переключения $\theta_п$ определяется необходимым путем торможения $\theta_т$ ШЭП, т. е. $|\theta_к - \theta_п| = \theta_т$. Линия $l_о$ учитывает уравнение особой траектории (2-17) и необходима для выявления момента переключения с релейного управления на особое.

Структурная схема оптимальной по быстродействию замкнутой системы управления для рассматриваемой модели ШЭП показана на рис. 2.12. В управляющем устройстве формируется переменная структура управления $U_б$, зависящая от отклонений текущих координат ШЭП от сепаратрис топологической картины, вида

$$U_б = \begin{cases} U_p, & q = 0, \\ U_{oc}, & q = 1, \end{cases}$$

где U_p – релейное управление $\pm U_{max}$, вырабатываемое релейным элементом РЭ по знаку отклонений текущих координат относительно сепаратрисы $l_п$ в соответствии с уравнением

$$U_p = -|U_{max}|\, sign\, l_п,$$

U_{oc} – особое управление, вырабатываемое с помощью обратной связи по скорости ШЭП в соответствии с уравнением (2-18).

Переключение управлений U_p и U_{oc} производится коммутатором К1, на управляющий вход которого подается сигнал q, вырабатываемый логическим блоком ЛБ1, на входы которого подается сигнал Δ соотношения $\theta_п$ и θ_0 и сигнал $l_о$ о знаке отклонения текущей координаты относительно особой траектории. Алгоритм работы ЛБ1 определяется таблицей истинности (табл. 2.2),

Таблица 2.2

Таблица истинности для логического блока ЛБ1

Δ	$l_о$	q
0	$l_о < 0$	0
0	$l_о > 0$	1
1	$l_о < 0$	1
1	$l_о > 0$	0

из которой логическое уравнение для сигнала q примет вид

$$q = \bar{\Delta}(l_0 > 0) + \Delta(l_0 < 0).$$

Сигнал $l_{\text{о}}$, вырабатывается сумматором Σ1, на входы которого подаются текущие координаты γ и θ, а также постоянный сигнал $\lambda = \pm {}^{\pi}/_{2}$. Выбор знака сигнала λ производится коммутатором К2 в зависимости от сигнала Δ по условию

$$\lambda = \begin{cases} +\dfrac{\pi}{2}, & \Delta = 1, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \Delta = 0. \end{cases}$$

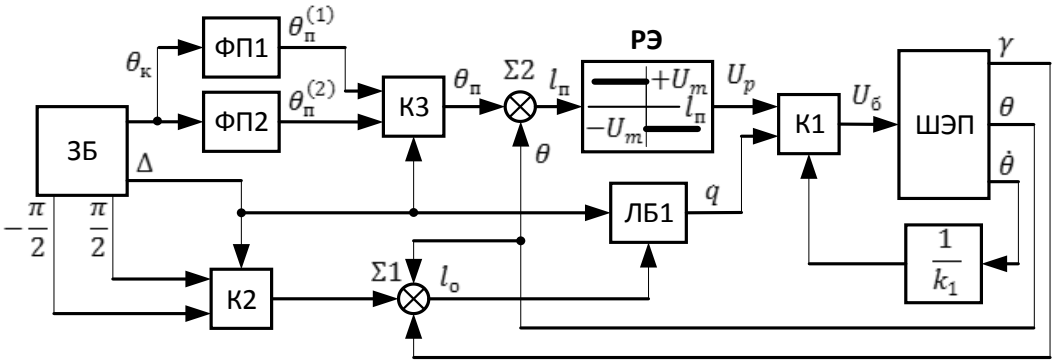

Рис. 2.12. Структура оптимального по быстродействию ШЭП

Сигнал $l_{\text{п}}$ отклонения текущей координаты θ относительно координаты переключения $\theta_{\text{п}}$ с особого управления на релейное определяется сумматором Σ2. Сигнал $\theta_{\text{п}}$, зависящий от знака Δ разности $\theta_{\text{к}} - \theta_{\text{о}}$, снимается с выхода коммутатора К3 по условию

$$\theta_{\text{п}} = \begin{cases} \theta_{\text{п}}^{(1)}, & \text{если } \Delta = 1, \\ \theta_{\text{п}}^{(2)}, & \text{если } \Delta = 0. \end{cases}$$

Сигналы $\theta_{\text{п}}^{(1)}$ и $\theta_{\text{п}}^{(2)}$ вырабатываются в общем случае соответствующими функциональными преобразователями ФП1 и ФП2 в зависимости от сигнала о требуемом конечном состоянии $\theta_{\text{к}}$ и необходимого пути торможения $\theta_{\text{т}}$

$$\theta_{\text{п}}^{(1)} = \theta_{\text{к}}^{(1)} - \theta_{\text{т}}^{(1)},$$
$$\theta_{\text{п}}^{(2)} = \theta_{\text{к}}^{(2)} - \theta_{\text{т}}^{(2)}.$$

В случае одинаковых путей торможения $\theta_{\text{т}}$ для произвольных конечных состояний $\theta_{\text{к}}$ функциональные преобразователи ФП1, ФП2 реализуют линейные зависимости $\theta_{\text{п}}(\theta_{\text{к}})$, показанные на рис. 2.13, в этом случае в качестве ФП1, ФП2 могут быть использованы сумматоры.

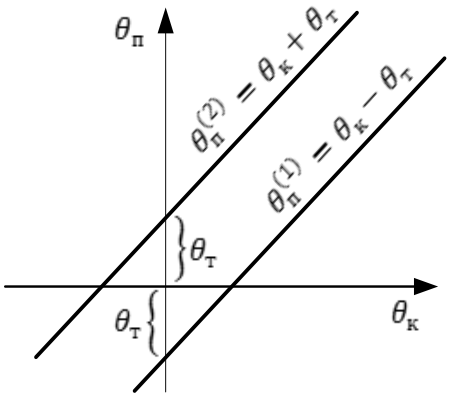

Рис. 2.13. Зависимость координат переключения $\theta_п$ от конечного состояния $\theta_к$

Система оптимального по быстродействию управления ШЭП не обеспечивает устойчивости конечного состояния $\theta_к$. Для устойчивости состояния $\theta_к$ в систему (см. рис. 2.12) вводится дополнительное устройство стабилизации, структура которого приведена на рис. 2.14. Стабилизация конечного состояния $\theta_к$ производится в заранее заданной зоне ε. При условии, что текущая координата ШЭП θ системой оптимального быстродействия с управлением $U_б$ выведена в зону $|\theta_к - \theta| \leq \varepsilon$, допольнительное устройство стабилизации вырабатывает управляющий сигнал $U_{ст} = 0$. В схеме на рис. 2.14 БМ – блок выделения модуля разности $|\theta_к - \theta|$, КП1 – компаратор, вырабатывающий сигнал i для переключения оптимального по быстродействию управления $U_б$ на управление $U_{ст}$ по условию

$$i = \begin{cases} 1, & \text{если } |\theta_к - \theta| > \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |\theta_к - \theta| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Сигнал i воздействует на управляющий вход коммутатора К4, с выхода которого снимается управление U

$$U = \begin{cases} U_б, & \text{если } i = 1, \\ U_{ст}, & \text{если } i = 0. \end{cases}$$

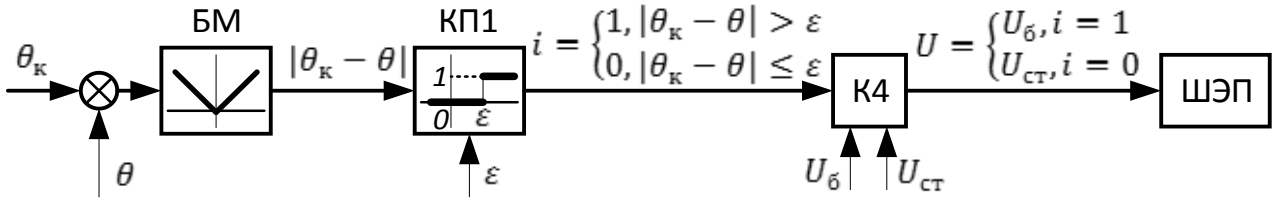

Рис. 2.14. Контур стабилизации конечного состояния $\theta_к$

Для реализации оптимального по быстродействию управления реальным ШЭП, содержащим на входе распределитель импульсов, необходимо учесть, что значение управления $U = +U_{max}$ соответствует частоте управляющих импульсов f_{max}, поступающих на суммирующий вход счетчика распределителя импульсов, а управление $U = -U_{max}$ соответствует частоте управляющих импульсов f_{max}, поступающих на вычитающий вход счетчика распределителя импульсов, т. е. знак релейного сигнала $U_p = \pm U_{max}$ соответствует направлению счета в счетчике распределителя импульсов. Сигнал особого управления $U_{\text{ос}}$ соответствует частоте управляющих импульсов f_{oc}, которую можно получить с помощью преобразователя напряжение-частота ПНЧ, а направление счета при f_{oc} должно быть того же знака, что и на первом интервале управления.

Тогда структурная схема для оптимального по быстродействию управления реальным ШЭП дополнится схемой рис. 2.15, в которой входные сигналы получаются из схемы рис. 2.12. Частота импульсов $f_{\text{б}}$, необходимая для быстродействия ШЭП, получается с выхода коммутатора К5 в соответствии с условием

$$f_{\text{б}} = \begin{cases} f_{max}, & \text{если } q = 0, \\ f_{oc}, & \text{если } q = 1. \end{cases}$$

Импульсы с частотой $f_{\text{б}}$ подаются на суммирующий или вычитающий вход счетчика распределителя импульсов ШЭП через комбинационную логическую схему КЛС1. Выбор направления счета определяется сигналом H, вырабатываемым компаратором КП2 в зависимости от знака отклонения $l_{\text{п}}$ текущей координаты θ относительно координаты переключения $\theta_{\text{п}}$

$$H = \begin{cases} 1, & l_{\text{п}} < 0, \theta > \theta_{\text{п}}, \quad U = -U_{max} \rightarrow \text{подкл. вычит. вход}, \\ 0, & l_{\text{п}} > 0, \theta < \theta_{\text{п}}, \quad U = +U_{max} \rightarrow \text{подкл. суммир. вход}. \end{cases}$$

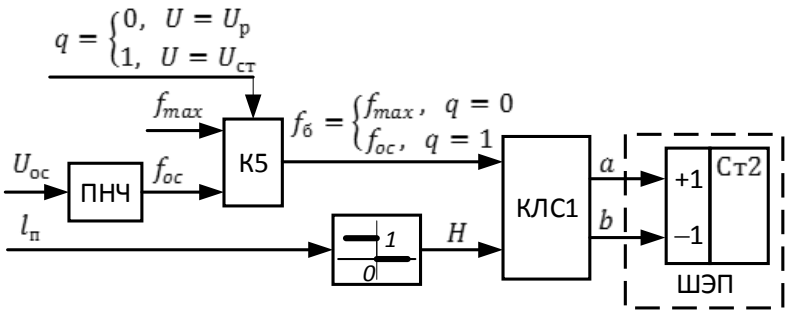

Рис. 2.15. Дополнение к реализации оптимального по быстродействию управления реальным ШЭП

При необходимости стабилизации конечного состояния $\theta_к$ реального ШЭП схема оптимального быстродействия дополняется коммутатором К6 (рис. 2.16), на вход которого подаются импульсы частоты получения быстродействия $f_б$ и частоты стабилизации $f_{ст} = 0$; управление коммутатором К6 производится сигналом i, который вырабатывается по схеме рис. 2.14.

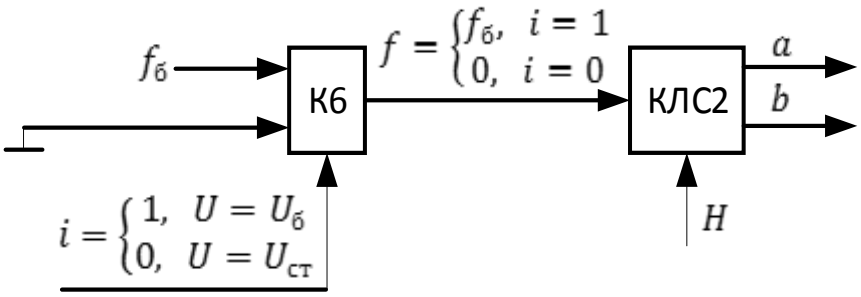

Рис. 2.16. Дополнение к реализации управления стабилизации реальным ШЭП

2.2.2. Минимизация динамической погрешности по скорости

Граничные условия в задаче на минимум отклонений скорости (2-13, 2-15) – начальное $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (\gamma_0, \theta_0, \dot{\theta}_0)$ и конечное $(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) = (\gamma_k, \theta_k, \dot{\theta}_k)$ – задаются на статических характеристиках ШЭП по скорости при $\dot{x}_2 = x_3 = \dot{\theta} \neq 0, \dot{x}_3 = \ddot{\theta} = 0$, полученных из уравнений (2-12) или (2-13), которыми является семейство прямых

$$\Omega_0^2 \, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2 \mu_c = 0, \qquad (2\text{-}19)$$

показанное на рис. 2.17 прямыми $S^{(1)}$ для случая $\dot{\theta} > 0$ и прямыми $S^{(2)}$ для случая $\dot{\theta} < 0$.

Задача (2-13, 2-15) линейна по управлению, поэтому, согласно принципу максимума, оптимальным является кусочно-постоянное управление с максимально возможными амплитудами:

$$H = -x_3^2 + \psi_1(k_1 U) + \psi_2 x_3 + \psi_3(\Omega_0^2 \, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2 \mu_c),$$
$$U = |U_{max}| \, sign \; k_1 \psi_1.$$

Ввиду того что задача (2-13, 2-15) с линейным управлением нелинейна по координатам, в ней возможно существование особого режима при $\psi_1 = \dot{\psi}_1 = \ddot{\psi}_1 = \cdots = 0$, когда принцип максимума не позволяет однозначно определить оптимальное упраление через вспомогательную переменную ψ_1. Для анализа существования и вычисле-

ния особого управления в задаче (2-13, 2-15) применим аппарат условий общности положения (УОП) для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат размерности (n+1) (см. п. 1.1.2.2).

Задача (2-13, 2-15) в расширенном пространстве координат записывается в векторно-матричной форме

$$\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x}) + B(\tilde{x})U,$$

где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} x_3^2 \\ 0 \\ x_3 \\ \Omega_0^2\, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2 \mu_c \end{pmatrix}, \qquad B(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

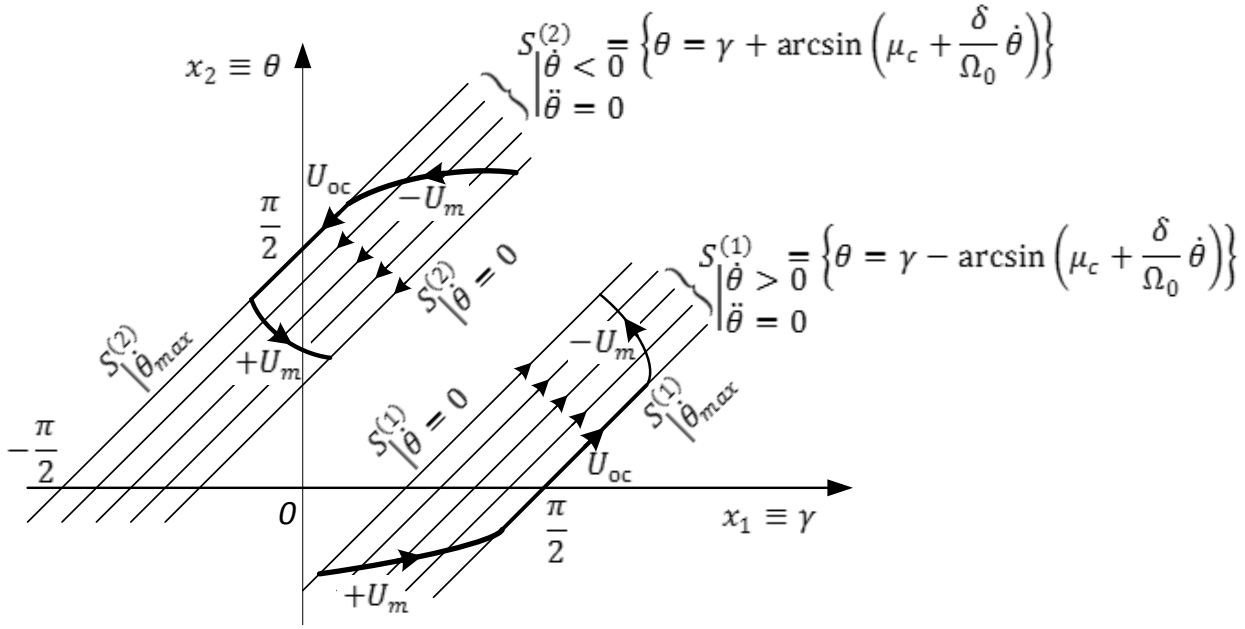

Рис. 2.17. Статические характеристики ШЭП по скорости

Выполнение УОП определяется по детерминанту матрицы $D_{n+1} = D_4$, составлено из векторов $B_j, j = \overline{1,4}$, вычисляемых по рекуррентному соотношению (1-9).

Матрица D_4 с элементами $b_{jk}, k = \overline{1,4}$ векторов B_j имеет вид

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{31} & b_{41} \\ b_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{43} \\ 0 & b_{24} & b_{34} & b_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$b_{12} = k_1,$$

$$b_{24} = -k_1\Omega_0^2\, cos(x_1 - x_2),$$
$$b_{31} = 2k_1\Omega_0^2\, cos(x_1 - x_2),$$
$$b_{33} = k_1\Omega_0^2\, cos(x_1 - x_2),$$
$$b_{34} = -k_1\delta\Omega_0^3\, cos(x_1 - x_2) + k_1\Omega_0^2(k_1U - x_3)sin(x_1 - x_2),$$
$$b_{41} = 2k_1\Omega_0^4(sin(x_1 - x_2) - \mu_c)\, cos(x_1 - x_2) - \\ - 4k_1\Omega_0^2x_3(k_1U - x_3)sin(x_1 - x_2),$$
$$b_{43} = k_1\delta\Omega_0^3\, cos(x_1 - x_2) - 2k_1\Omega_0^2(k_1U - x_3)sin(x_1 - x_2),$$
$$b_{44} = k_1^2\Omega_0^2\dot{U}sin(x_1 - x_2) + k_1\Omega_0^4cos^2(x_1 - x_2) + \\ +k_1\Omega_0^2((k_1U - x_3)^2 - \delta^2\Omega_0^2)\, cos(x_1 - x_2) + \\ +k_1\Omega_0^3(2k_1\delta U - \delta x_3 - \Omega_0 sin^2(x_1 - x_2) + \Omega_0\mu_c)\, sin(x_1 - x_2).$$

Детерминант матрицы D_4 определяется выражением

$$det\, D_4 = -b_{12}b_{24}(b_{31}b_{43} - b_{33}b_{41}) = \\ = -2k_1^4\Omega_0^6\, cos^3(x_1 - x_2)\,(\Omega_0^2\, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0x_3 - \Omega_0^2\mu_c),$$

из которого следует, что в поставленной задаче (2-13, 2-15) УОП не выполняются на множестве особых траекторий, полученных путем приравнивания нулю $det\, D_4$:

$$\begin{aligned} &1)\quad x_1 - x_2 = \pm{}^{\pi}/_{2}, \\ &2)\quad \Omega_0^2\, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0x_3 - \Omega_0^2\mu_c = \dot{x}_3 = 0. \end{aligned} \tag{2-20}$$

Для нахождения особого управления, реализующего особые траектории, можно воспользоваться тремя путями:

1) совместно решить уравнения движения объекта (2-13) и уравнения особых траекторий (2-20);

2) вычислить по соотношению (1-9) дополнительный вектор B_5, а особое управление найти из детерминантов матриц $D_4^1 = (b_1\ b_2\ b_3\ b_5)$, $D_4^2 = (b_1\ b_2\ b_4\ b_5)$, $D_4^3 = (b_1\ b_3\ b_4\ b_5)$, $D_4^4 = (b_2\ b_3\ b_4\ b_5)$,

3) приравнять нулю элементы векторов $B_j, j = 3, 4$ с подстановкой в них уравнений особых траекторий (2-20).

Все пути дают одинаковые результаты, но меньшие вычислительные затраты имеет последний путь.

Первая траектория в (2-20) $(x_1 - x_2) = \pm{}^{\pi}/_{2}$ или в физических терминах $(\gamma - \theta) = \pm{}^{\pi}/_{2}$ реализуется особым управлением

$$U_{oc} = \frac{x_3}{k_1} = \frac{\dot{\theta}}{k_1}, \tag{2-21}$$

которое соответствует введению обратной связи по скорости ШЭП.

Второе множество особых траекторий (2-20) соответствует уравнениям статической характеристики ШЭП по скорости (2-19) при $\dot{x}_3 = \ddot{\theta} = 0$ и $x_3 = \dot{\theta} \neq 0$, которые реализуются особым управлением

$$U_{oc} = \frac{\frac{\delta\Omega_0}{2} ctg(x_1 - x_2) + x_3}{k_1} = \frac{\frac{\delta\Omega_0}{2} ctg(\gamma - \theta) + \dot{\theta}}{k_1}. \qquad (2\text{-}22)$$

Отметим, что первая особая траектория в (2-20) является частным случаем второго множества особых траекторий, получаемых для максимальной скорости ШЭП, а особое управление (2-21), реализующее первую особую траекторию, является частным случаем особого управления (2-22), реализующего второе множество особых траекторий для произвольной скорости ШЭП.

Физически полученная особая траектория (2-20) и особое управление общего вида (2-22) означают, что для минимизации колебаний скорости необходимы обратные связи по скорости $\dot{\theta}$, ускорению $\ddot{\theta}$ и динамической погрешности по положению $(\gamma - \theta)$.

Фазовые траектории ШЭП при оптимальном управлении на минимум отклонений скорости с включением интервалов релейного и особого управления и различных знаках скорости показаны на рис. 2.18. Разгон и торможение ШЭП производятся под действием релейного управления с максимально допустимыми амплитудами управления $+U_{max}$ или $-U_{max}$. При вхождении скорости ШЭП, измеренной датчиком скорости, в заданную зону стабилизации скорости ε , определяемой как модуль разности измеренной скорости $\dot{\theta}$ и заданного конечного скорости $\dot{\theta}_к$, т. е. при $\left|\dot{\theta} - \theta_к\right| \leq \varepsilon$, максимально допустимое управление отключается. При этом получается максимальное значение скорости, а ускорение будет равно нулю, т. е. происходит выход на особую траекторию с $\ddot{\theta} = 0$, а управление ШЭП происходит в дальнейшем под действием особого управления (2-22). Моделированием системы с релейным и особым управлением (рис. 2.19) получено, что для уменьшения колебаний скорости с использованием особого управления необходимо изменять знак особого управления в зависимости от знака ускорения ШЭП, измеряемого датчиком ускорения (акселерометром), в соответствии с условием

$$U_{oc} = \begin{cases} +|U_{oc}|, & \ddot{\theta} < 0, \\ -|U_{oc}|, & \ddot{\theta} > 0. \end{cases} \qquad (2\text{-}23)$$

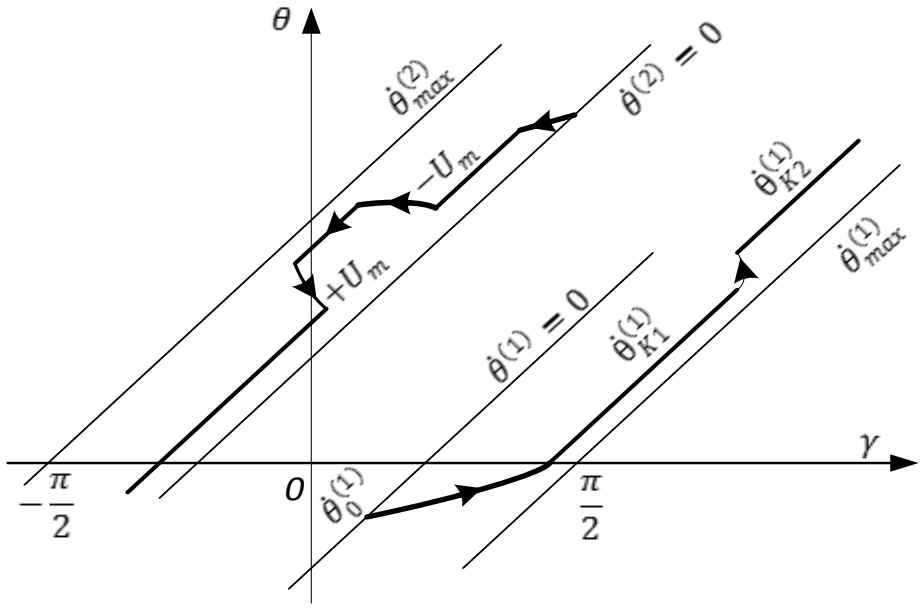

Рис. 2.18. Траектории ШЭП при оптимальном управлении на минимум отклонений скорости

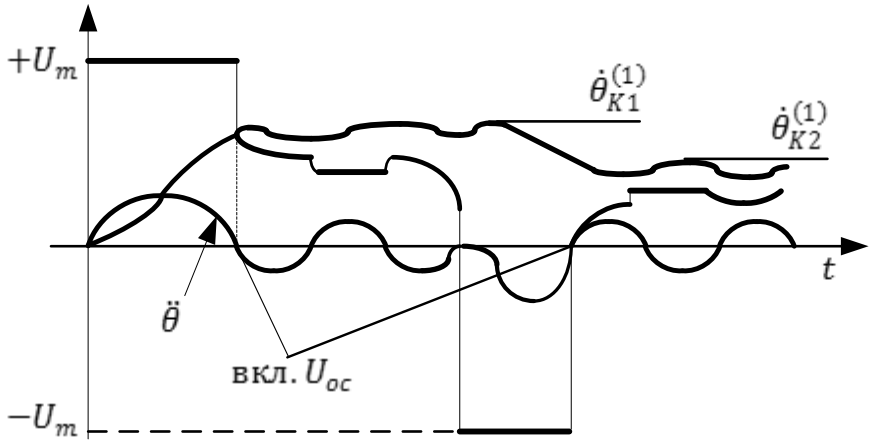

Рис. 2.19. Переходные процессы ШЭП с релейным и особым управлениями

На рис. 2.20 приведена структурная схема системы управления ШЭП для реализации полученного управления в случае одного направления вращения ШД, в которой используется переменная структура управляющего устройства по отклонению текущего значения скорости ШЭП с пропорциональным ему напряжением $\dot{\theta}$, вырабатываемым датчиком скорости ДС, от заданного конечного значения скорости с пропорциональным ему напряжением $\dot{\theta}_{\text{к}}$, вырабатываемым преобразователем частота-напряжение ПЧН по значениям частоты импульсов f_k, соответствующей заданной скорости ШЭП и снимаемой с второго выхода задающего блока ЗБ. Частота управ-

ляющих импульсов f ШЭП вырабатывается первым коммутатором К1 в зависимости от значения логического сигнала æ, снимаемого с второго компаратора КП2,

$$f = \begin{cases} f_{max}, & \text{если æ} = 1, \\ f_k + f_{oc}, & \text{если æ} = 0, \end{cases}$$

где f_{max} – максимально допустимая частота управляющих импульсов ШЭП, вырабатываемая задающим блоком ЗБ, используемая при разгоне и торможении ШЭП;

æ – логический сигнал, определяемый вторым компаратором КП2 в зависимости от заданной точности ε поддержания текущей скорости $\dot{\theta}$ относительно требуемой $\dot{\theta}_{\text{к}}$, равный

$$\text{æ} = \begin{cases} 1, & \text{если } \left|\dot{\theta}_{\text{к}} - \dot{\theta}\right| > \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \left|\dot{\theta}_{\text{к}} - \dot{\theta}\right| \leq \varepsilon, \end{cases}$$

при этом разность $(\dot{\theta}_{\text{к}} - \dot{\theta})$ определяется третьим сумматором Σ3,

$f_k + f_{oc}$ – частота управляющих импульсов ШЭП, равная сумме частоты $f_{\text{к}}$, соответствующей требуемой скорости, и частоты коррекции скорости f_{oc}, вырабатываемая преобразователем напряжения-частота ПНЧ, соответствующая сумме напряжения $\dot{\theta}_{\text{к}}$, пропорционального требуемой скорости, и напряжения коррекции скорости $\dot{\theta}_{\text{ос}}$, которая получается первым сумматором Σ1.

Напряжение коррекции скорости $\dot{\theta}_{\text{ос}}$ вырабатывается вторым коммутатором К2 по условию

$$\dot{\theta}_{\text{ос}} = \begin{cases} -U_{oc}, & \text{если } \rho = 1, \\ +U_{oc}, & \text{если } \rho = 0, \end{cases}$$

где U_{oc} – напряжение коррекции скорости, снимаемое со второго сумматора Σ2, которое вырабатывается в соответствии с уравнением особого управления (2-22) с помощью первого усилителя У1 с выходным сигналом $\dot{\theta}/k_1$ и функционального преобразователя ФП с выходным сигналом $\frac{1}{2k_1}\delta\Omega_0 \operatorname{ctg}(\gamma - \theta)$, входное напряжение которого $(\gamma - \theta)$ определяется датчиком динамической погрешности ДДП по выходным сигналам ШЭП, соответствующим задающему углу поворота вектора поля статора и угла поворота ШД.

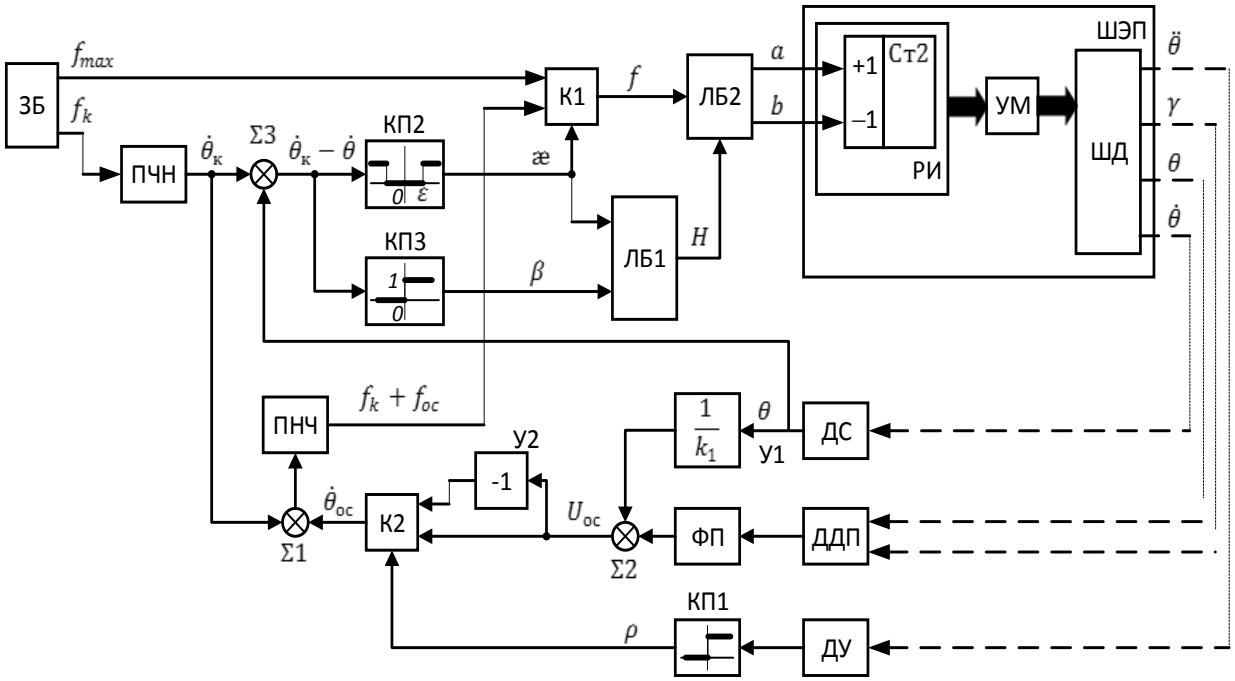

Рис. 2.20. Структурная схема системы управления ШЭП
в случае одного направления вращения

Сигнал $-U_{oc}$ получается путем инвертирования сигнала U_{oc} вторым усилителем У2. Для получения сигнала $\dot{\theta}_{\text{ос}}$ знак сигнала U_{oc} выбирается по уравнению (2-23) в зависимости от знака напряжения $\ddot{\theta}$, пропорционального ускорению ШЭП, которое измеряется датчиком ускорения (акселерометром) ДУ. Знак сигнала $\ddot{\theta}$ определяется первым компаратором КП1 с выходным сигналом ρ, равным

$$\rho = \begin{cases} 1, & \text{если } \ddot{\theta} > 0, \\ 0, & \text{если } \ddot{\theta} < 0. \end{cases}$$

Поступление управляющих импульсов частотой f на суммирующий (a) или вычитающий (b) входы счетчика распределителя импульсов РИ определяется вторым логическим блоком ЛБ2 в соответствии с уравнением

$$a = f \cdot \overline{H}, \qquad b = f \cdot H,$$

где H – сигнал направления счета, вырабатываемый первым логическим блоком ЛБ1 по сигналу æ от второго компаратора КП2 о вхождении скорости ШЭП в зону стабилизации скорости ε и сигналу β от третьего компаратора КП3 о знаке отклонения текущей скорости $\dot{\theta}$ от требуемой $\dot{\theta}_{\text{к}}$

$$\beta = \begin{cases} 1, & \dot{\theta}_к - \dot{\theta} > 0, \\ 0, & \dot{\theta}_к - \dot{\theta} < 0. \end{cases}$$

Первый логический блок ЛБ1 реализует логическую функцию

$$H = æ\bar{\beta},$$

которая получается из таблицы истинности (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Таблица истинности для ЛБ1

æ	β	f	H
0	0	$(f_k + f_{oc}) \to a$	0
0	1	$(f_k + f_{oc}) \to a$	0
1	0	$f_{max} \to b$	1
1	1	$f_{max} \to a$	0

Структурная схема системы управления ШЭП с применением полученного управления в случае различных направлений движения ШЭП показана на рис. 2.21. В управляющее устройство дополнительно введены первый БМ1, второй БМ2, третий БМ3 и четвертый БМ4 блоки модуля, позволяющие из знакопеременных сигналов получить положительно определенные сигналы, третий коммутатор К3, позволяющий из разнополярных напряжений $\pm|\dot{\theta}_k|$, пропорциональных требуемой скорости ШЭП, вырабатываемых преобразователем частота-напряжение ПЧН с выходом $|\dot{\theta}_k|$ и третьим усилителем У3, инвертирующим сигнал $|\dot{\theta}_k|$, выбрать знак сигнала требуемой скорости $\dot{\theta}_k$ по условию

$$\dot{\theta}_k = \begin{cases} |\dot{\theta}_k|, & \text{если } \alpha = 1, \\ -|\dot{\theta}_k|, & \text{если } \alpha = 0, \end{cases}$$

где α – логический сигнал, снимаемый с третьего выхода задающего блока ЗБ, характеризующий направление движения ШЭП и равный

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \dot{\theta} > 0, \\ 0, & \text{если } \dot{\theta} < 0. \end{cases}$$

Сигнал направления счета H, снимаемый с выхода первого логического блока ЛБ1, определяется по сигналам α, æ, β, вырабатываемых соответственно задающим блоком ЗБ, вторым КП2 и третьим КП3 компараторами в соответствии с логическим уравнением

$$H = \alpha æ \bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{æ} + \bar{\alpha}\beta,$$

которое получается из таблицы истинности (табл. 2.4) и карты Карно (табл. 2.5).

Таблица 2.4

Таблица истинности ЛБ1

α	æ	β	f	H
0	0	0	$f_k + f_{oc} \to b$	1
0	0	1	$f_k + f_{oc} \to b$	1
0	1	0	$f_{max} \to a$	0
0	1	1	$f_{max} \to b$	1
1	0	0	$f_k + f_{oc} \to a$	0
1	0	1	$f_k + f_{oc} \to a$	0
1	1	0	$f_{max} \to b$	1
1	1	1	$f_{max} \to a$	0

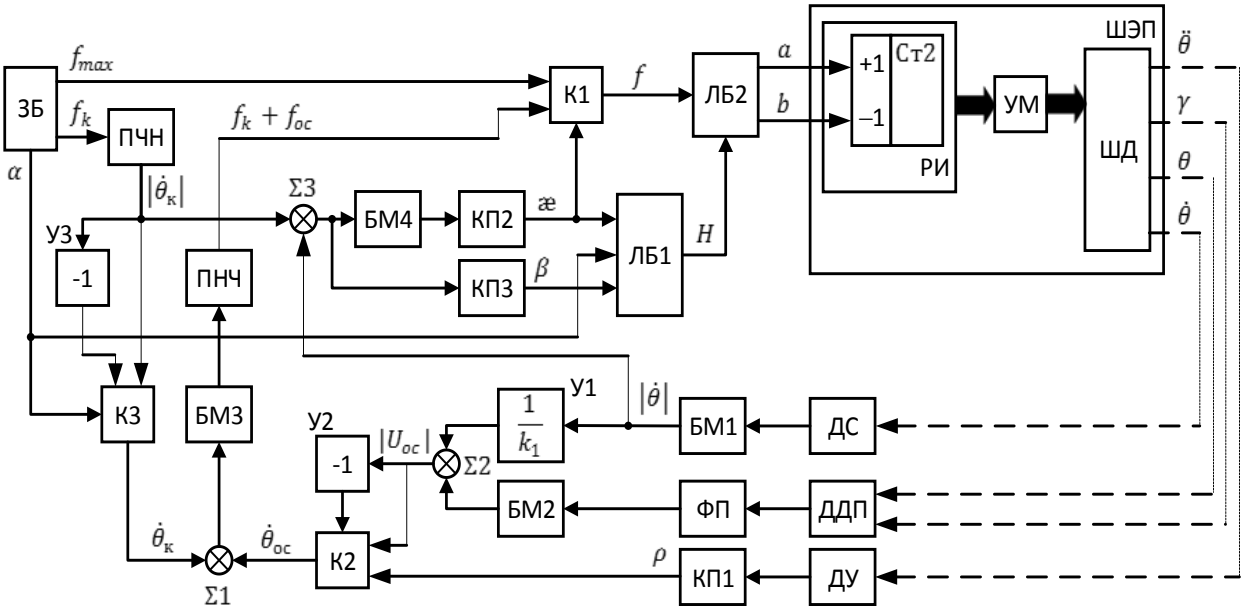

Рис. 2.21. Структурная схема системы управления ШЭП в случае различных направлений движения

Таблица 2.5

Карта Карно для выхода H ЛБ1

β

æ

	1	0	1	1
α	0	1	0	0

2.2.3. Минимизация динамической погрешности по положению

Задача минимизации динамической погрешности по положению (2-13, 2-16) в векторно-матричной форме $\dot{\tilde{x}} = A(\tilde{x}) + B(\tilde{x})U$ в расширенном пространстве координат R_4 имеет элементы

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad A(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} (x_1 - x_2)^2 \\ 0 \\ x_3 \\ \Omega_0^2\, sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2\mu_c \end{pmatrix}, \qquad B(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя для этой задачи УОП для нелинейных объектов в расширенном пространстве координат R_4 по рекуррентному соотношению (1-9), определяем векторы $B_j, j = \overline{1,4}$ с элементами $b_{jk}, k = \overline{1,4}$

$$b_{12} = k_1,$$
$$b_{21} = -2k_1(x_1 - x_2),$$
$$b_{24} = -k_1\Omega_0^2\, cos(x_1 - x_2),$$
$$b_{31} = -2k_1^2 U + 2k_1 x_3,$$
$$b_{33} = k_1\Omega_0^2\, cos(x_1 - x_2),$$
$$b_{34} = -k_1\delta\Omega_0^3\, cos(x_1 - x_2) + k_1\Omega_0^2(k_1 U - x_3) sin(x_1 - x_2),$$
$$b_{41} = 2k_1\Omega_0^2(x_1 - x_2)\, cos(x_1 - x_2) + 2k_1(\Omega_0^2 sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2\mu_c),$$
$$b_{43} = k_1\delta\Omega_0^3\, cos(x_1 - x_2) - 2k_1\Omega_0^2(k_1 U - x_3) sin(x_1 - x_2),$$
$$b_{44} = k_1^2\Omega_0^2 \frac{dU}{dt} sin(x_1 - x_2) + k_1\Omega_0^4\big(cos^2(x_1 - x_2) - sin^2(x_1 - x_2)\big) +$$
$$+k_1\Omega_0^2((k_1 U - x_3)^2 - \delta^2\Omega_0^2)\, cos(x_1 - x_2) + k_1\Omega_0^3(2k_1\delta U - \delta x_3 + \Omega_0\mu_c).$$

Отметим, что в отличие от рассмотренных ранее задач элемент b_{44} содержит производную управления по времени. Приравнивая нулю детерминант матрицы D_4, составленной из векторов $B_j, j = \overline{1,4}$, определяем множество особых управлений

$$
\begin{gathered}
det\, D_4 = -2k_1^4\Omega_0^4(\Omega_0^2(x_1 - x_2)\, cos(x_1 - x_2)\, sin^2(x_1 - x_2) + \\
+(\delta\Omega_0(k_1U - x_3) - (x_1 - x_2)(k_1U - x_3)^2 + \\
+\Omega_0^2 sin(x_1 - x_2) - \delta\Omega_0 x_3 - \Omega_0^2\mu_c)cos^2(x_1 - x_2) + \\
+(\Omega_0(x_1 - x_2)(k_1\delta U - 2\delta x_3 - \Omega_0\mu_c) - \\
-2(k_1U - x_3)^2 - k_1(x_1 - x_2)\frac{dU}{dt}\Big) sin(x_1 - x_2)\, cos(x_1 - x_2) - \\
-2(x_1 - x_2)(k_1U - x_3)^2 sin^2(x_1 - x_2)\Big) = 0,
\end{gathered}
\tag{2-24}
$$

из которого следует, что для выработки особого управления требуется нелинейный пропорционально-интегральный регулятор общего вида

$$\frac{dU}{dt} = f(U, x_1, x_2, x_3, \delta, \Omega_0, \mu_c, k_1).$$

Решить в явном виде дифференциальное уравнение для особого управления (2-24) невозможно, однако можно показать, что частным решением, удовлетворяющим (2-24), является особая траектория $\dot{x}_3 = 0$ с линейным пропорциональным регулятором, вырабатывающим особое управление

$$U = \frac{x_3}{k_1}.$$

Моделирование ШЭП подтверждает результаты проведенного анализа, а именно: в момент, когда ускорение $\ddot{\theta}$ равно нулю, т. е. когда скорость x_3 достигает своего экстремального значения, нужно включить обратную связь по скорости. Знак обратной связи необходимо выбирать так, чтобы уменьшить колебательность системы, т. е. при достижении максимума скорости включается отрицательная обратная связь, а при достижении минимума – положительная обратная связь. В рассматриваемой задаче, как и в задаче минимизации динамической погрешности по скорости, УОП выделяют траекторию или линию переключения особого управления. Структура системы управления ШЭП для реализации оптимального управления с минимумом динамических погрешностей по положению аналогична структуре системы управления ШЭП с минимумом погрешности по скорости (см. рис. 2.20, 2.21) с исключением датчика динамической погрешности, функционального преобразователя и второго сумматора.

2.3. УПРАВЛЕНИЕ ОЗОНАТОРОМ

Электросинтез озона – единственный промышленно применяемый способ получения устойчивого озона. С учетом энергоемкости установок электросинтеза озона, а также необходимости регулирования получаемой концентрации озона возникает проблема минимизации временных и энергетических затрат в переходных режимах работы озонаторов [98].

Общепринятой математической модели, адекватно отражающей процессы в озонаторе, в настоящее время не существует, поэтому для промышленных установок строятся реальные модели процессов.

Для построения реальной модели процесса электросинтеза озона снимается экспериментальная зависимость концентрации озона от частоты импульсов разряда, показанная на рис. 2.22 кривой S, при этом полученная реальная статическая характеристика является экстремальной. Максимум в характеристике объясняется тем, что с увеличением частоты увеличивается электрическая мощность разряда, а концентрация озона, образующегося в разряде, пропорциональна его электрической мощности. Вместе с тем с увеличением мощности начинает расти температура газа в разрядном промежутке, вследствие этого растет константа разложения озона. При больших частотах и мощностях константа разложения озона оказывается больше константы образования, что приводит к снижению концентрации.

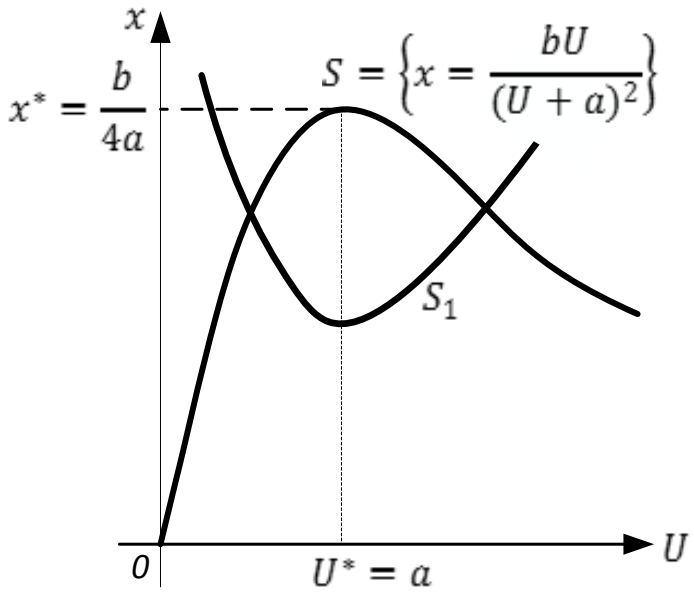

Рис. 2.22. Зависимости концентрации озона
и энергозатрат от частоты импульсов разряда

Также снимается экспериментальная зависимость энергозатрат от частоты, показанная кривой S_1 на рис. 2.22. Следует отметить, что наименьшие энергозатраты наблюдаются при максимальных концентрациях озона.

На основе выявленных экспериментально зависимостей, а также снятой экспериментально переходной характеристике изменения концентрации от времени при скачкообразном изменении частоты по уравнениям материального баланса получается математическое списание процессов в реальном озонаторе вида

$$T\frac{dx}{dt} = \frac{b}{(U+a)^2}U - x, \tag{2-25}$$

где x – концентрация озона Q,

U – частота импульсов разряда f,

a, b, T – параметры процесса, причем точка экстремума статической характеристики $x(U)$ имеет координаты $U^* = a$, $x^* = {}^{b}/_{4a}$.

Для реальной модели озонатора (2-25) исследуется оптимальное по быстродействию управление с критерием

$$I = \int_0^T 1dt \tag{2-26}$$

и оптимальное управление с минимумом потерь в преобразователе с критерием

$$I = \int_0^T U^{1,5}dt. \tag{2-27}$$

Степень 1,5 в критерии (2-27) объясняется тем, что потери в преобразователе состоят из потерь на гистерезис и вихревые токи, пропорциональные соответственно первой и второй степени частоты, поэтому рекомендуется при частотном управлении использовать степень 1,5 [78].

Так как поставленные задачи (2-25, 2-26) и (2-25, 2-27) нелинейны по управлению, то для использования условий общности положения для нелинейных объектов производится их линеаризация путем перехода к редуцированной задаче с линейным управлением в соответствии с методикой п. 1.1.4.1. Применяя УОП в пространстве R_2

для задачи быстродействия (2-25, 2-26), получаем связь координат и управлений в особом режиме вида

$$det\, D_2 = -\frac{b(U-a)}{T(U+a)^3} = 0,$$

а в задаче на минимум потерь (2-25, 2-27) из УОП в пространстве R_3 получается, что особый режим существует, если

$$det\, D_3 = \frac{1.5U^{0.5}b(U-a)}{T^2(U+a)^3} = 0.$$

Из полученных уравнений особых режимов следует, что для обеспечения минимального времени переходных процессов и минимума энергозатрат необходимо использовать особое управление $U_{oc} = a$.

На основе качественного анализа проводится численный расчет оптимальных траекторий, который позволяет выявить координаты точек переключения на особое управление при различных граничных условиях. Например, для нулевой начальной концентрации $x_{\text{нач}} = 0$ оптимальные управляющие последовательности зависят от требуемой конечной концентрации $x_{\text{тр}}$:

– для достижения малых концентраций оптимальное управление состоит из одного интервала с частотой $U_{\text{тр}}$, соответствующей требуемой концентрации по статической характеристике;

– для достижения больших концентраций оптимальная управляющая последовательность состоит из двух интервалов: сначала включается частота, равная a, а затем производится переключение на требуемую по статической характеристике частоту $U_{\text{тр}}$. Траектории для случая $x_{\text{нач}} = 0$ приведены на рис. 2.23. Для рассматриваемого случая зависимость координаты переключения $x_{\text{пер}}$ от требуемой концентрации показана на рис. 2.24, из которой видно, что для достижения малых требуемых концентраций $x_{\text{тр}} < x'_{\text{тр}}$ координата переключения $x_{\text{пер}}$ с $U = a$ на $U = U_{\text{тр}}$ равна нулю, а для достижения больших концентраций включается интервал особого управления $U = a$, в предельном случае для достижения максимальной концентрации $x_{\text{тр}} = {}^{b}/_{4a}$ используется только один интервал с особым управлением $U = a$.

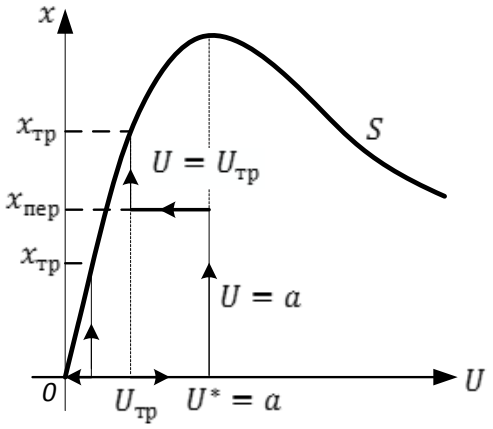

Рис. 2.23. Траектории переменных при $x_{нач} = 0$

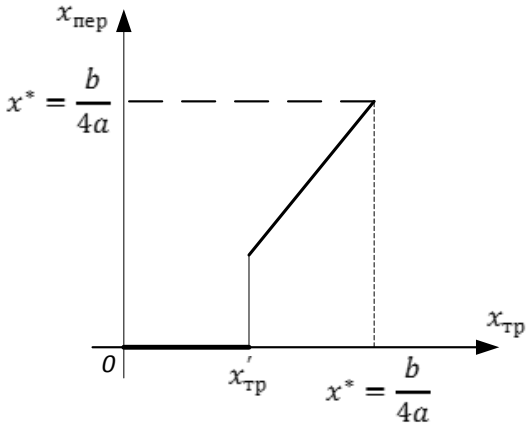

Рис. 2.24. Зависимость координаты переключения $x_{пер}$ от требуемой концентрации

Структура оптимальной замкнутой системы для рассматриваемого случая $x_{нач} = 0$ показана на рис. 2.25, где БЗ – блок задания – вырабатывает требуемое значение концентрации озона $x_{тр}$ и значение частоты $U = a$, соответствующей получению максимальной концентрации озона. Функциональный преобразователь ФП1 вырабатывает зависимость (рис. 2.24) координаты переключения $x_{пер}$ с особого управления $U = a$ на требуемую по статической характеристике частоту $U_{тр}$ (см. рис. 2.24), функциональный преобразователь ФП2 моделирует обратную статическую характеристику озонатора $U_{тр}(x_{тр})$. Коммутатор К переключает управление озонатором с $U = a$ на $U = U_{тр}$ в зависимости от логического сигнала i с компаратора СА, сравнивающего текущее значение концентрации озона x, снимаемого с датчика концентрации озона ДКО, со значением координаты переключения $x_{пер}$.

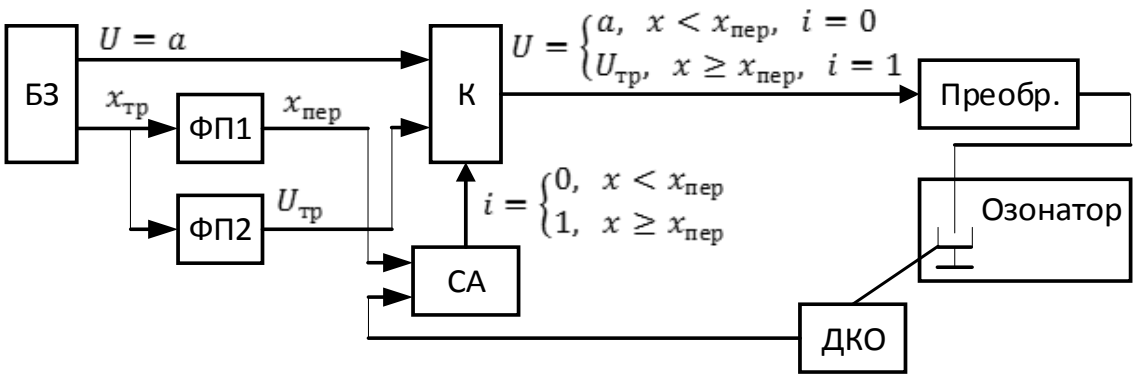

Рис. 2.25. Структура оптимальной замкнутой системы при $x_{нач} = 0$

Для произвольных граничных условий структура оптимального регулятора концентрации озона показана на рис. 2.26, работа которого аналогична рассмотренной работе регулятора для начального условия $x_{нач} = 0$. В структуре регулятора (см. рис. 2.26) выделяются области начальных значений концентраций $x_{нач}^{i} := \{x_{нач(i-1)} \leq x < x_{нач\,i}\}$, для которых определяются зависимости координат переключения $x_{пер}^{i}$ в зависимости от требуемого конечного значения концентрации $x_{тр}$. По переднему фронту сигнала $x_{тр}$, соответствующего требуемой концентрации в данном цикле, с помощью формирователя импульса ФИ текущее значение концентрации в дискретной форме $\bar{x}$, снимаемое с выхода аналого-цифрового преобразователя АЦП по значениям аналогового сигнала x с датчика концентрации озона ДКО, которое является начальным для последующего регулирования концентрации, записывается в регистр RG, а с помощью дешифратора ДС определяется принадлежность начального значения $\bar{x}_{нач}$ выделенной области $x_{нач}^{i}$.

Выходы дешифратора ДС подсоединены к управляющим входам коммутаторов К1, К2, …, К$_{max}$, которые подключают значение $x_{тр}$ на соответствующие функциональные преобразователи ФП1, ФП2, …, ФП$_{max}$, вырабатывающие зависимости координаты переключения $x_{пер}^{1}$, $x_{пер}^{2}$, …, $x_{пер}^{max}$ для выделенного начального значения концентрации $x_{нач}^{i}$ и требуемой концентрации $x_{тр}$. С помощью компараторов СА1, СА2, СА3 и логических элементов И-НЕ определяется направление изменения концентрации и сравнивается текущее значение концентрации x с координатой переключения $x_{пер}$ и требуемой концентрации $x_{тр}$, а с помощью коммутаторов 1К и 2К производится выбор управляющих воздействий на озонатор по логическим сигналам i и g в соответствии с условиями:

– для $x_{\text{тр}} > x_{\text{нач}}$

$$U = \begin{cases} a, & x < x_{\text{пер}}, \quad i = 0, \\ U_{\text{тр}}, & x \geq x_{\text{пер}}, \quad i = 1; \end{cases}$$

– для $x_{\text{тр}} < x_{\text{нач}}$

$$U = \begin{cases} 0, & x > x_{\text{тр}}, \quad g = 0, \\ U_{\text{тр}}, & x \leq x_{\text{тр}}, \quad g = 1. \end{cases}$$

Регулятор позволяет оптимальным образом изменять концентрацию озона в задачах на минимум времени переходных процессов или минимум энергозатрат. В случае нестабильности характеристик озонатора для поддержания требуемого конечного значения концентрации озона $x_{\text{тр}}$ можно использовать режим стабилизации с управлением вида

$$U = \begin{cases} a, & x \leq x_{\text{тр}}, \quad l = 1, \\ 0, & x > x_{\text{тр}}, \quad l = 0, \end{cases}$$

где логическое условие переключения l определяется компаратором САЗ.

Следует отметить, что представленная структура оптимального регулятора является универсальной для объектов с двумя интервалами кусочно-постоянных управлений, включая особое, и позволяет обеспечить устойчивость конечного состояния объекта.

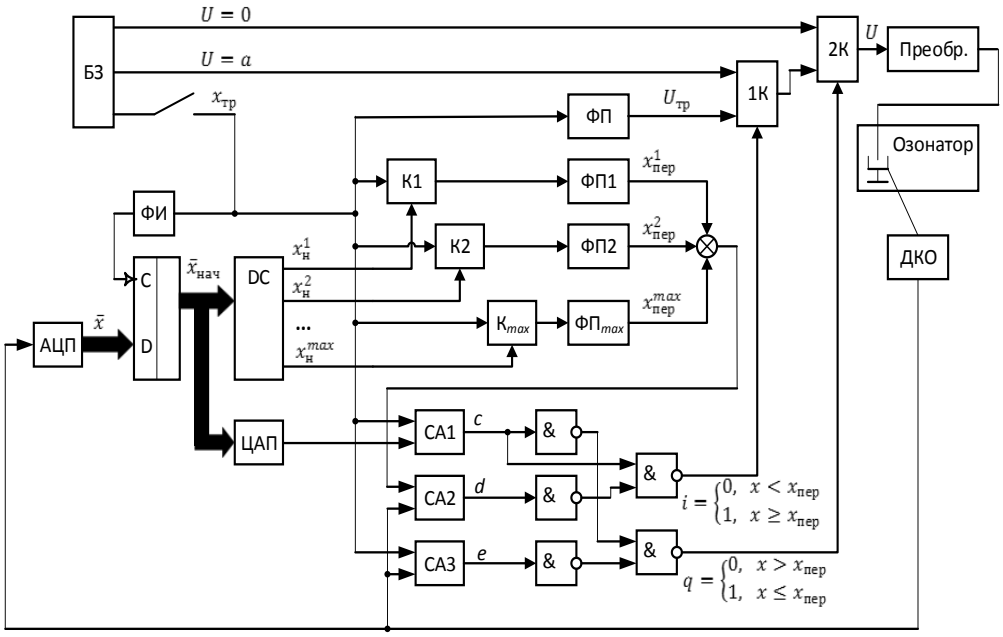

Рис. 2.26. Структура оптимального регулятора концентрации озона для произвольных граничных условий

2.4. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УПРАВЛЯЮЩИЕ УСТРОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотренные примеры управления электротехническими установками выявляют общие свойства оптимального управления нелинейными динамическими объектами в задачах минимизации временных, материальных и энергетических ресурсов. Совместное использование принципа максимума и условий общности положения для нелинейных объектов позволяет определить оптимальное управление в функции координат объекта, а с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений выделяются подпространства координат с постоянным характером управления. В свою очередь, общие свойства оптимальных управлений и топологий оптимальных траекторий проявляются в общих свойствах структур управляющих устройств для реализации управления.

Рассмотрим неформализованный подход к синтезу вариантов структур управляющих устройств оптимальных систем. Отметим, что задачи структурного синтеза относятся к задачам проектирования, наиболее сложным с точки зрения возможностей формализации. Формализованные методы синтеза структуры разработаны для ограниченного круга объектов, например, таких как автоматы и алгоритмы, причем отсутствуют эффективные методы синтеза укрупненной структуры сложных проектируемых объектов [69]. Формализованные методы синтеза [6], несомненно, предпочтительнее, однако для создания информационного обеспечения процесса проектирования, а также доказательства применимости формализованных методов необходимо иметь альтернативные варианты структуры, которые могут быть получены неформализованным путем.

Известные алгоритмы функционирования оптимальных систем, отражающие топологию траекторий и управляющие воздействия, позволяют определить факторы, влияющие на структуру управляющего устройства, и, выявив укрупненные блоки структуры, придать управляющему устройству универсальность, учитывающую различные сочетания факторов.

На рис. 2.27 приведена структура оптимальной замкнутой системы, состоящей из объекта управления ОУ, управляющей части – управляющего устройства УУ – и информационной части – блока задания БЗ и датчиков текущей информации Д о координатах объекта. Будем считать, что блок перехода БП реализует допустимое управление, переводящее объект из начального состояния в конечное с ми-

нимумом заданного критерия качества без гарантии устойчивости конечного состояния, а блок стабилизации БС вырабатывает управляющее воздействие, обеспечивающее асимптотическую устойчивость траекторий координат объекта в произвольной конечной точке.

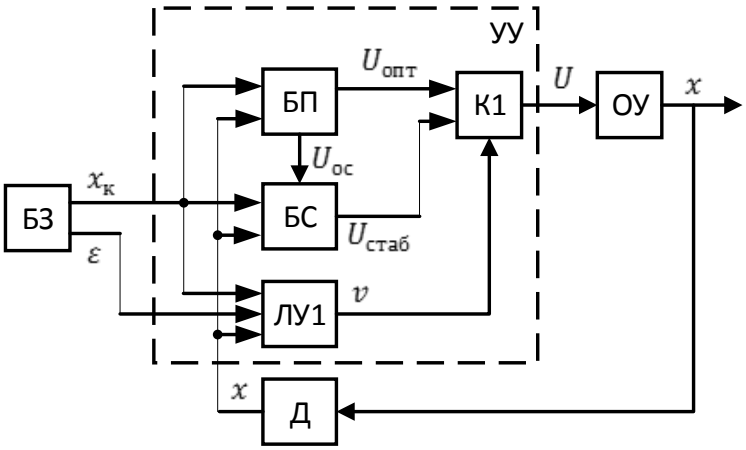

Рис. 2.27. Структура оптимальной замкнутой системы

В управляющее устройство УУ входят:

– блок перехода БП, вырабатывающий оптимальное управление $U_{опт}$ по сигналам задания конечных координат $x_к$ от блока задания БЗ и сигналам текущих координат x от датчиков Д;

– блок стабилизации БС, вырабатывающий управление $U_{стаб}$ для асимптотической устойчивости конечных координат $x_к$ при попадании текущих координат x в ε -окрестность конечных координат;

– коммутатор К1, переключающий управление объектом U с оптимального управления $U_{опт}$ на управление стабилизации $U_{стаб}$ по сигналу v от логического устройства ЛУ1, выход коммутатора К1 равен

$$U = \begin{cases} U_{опт}, & \text{если } v = 0, \\ U_{стаб}, & \text{если } v = 1; \end{cases}$$

– логическое устройство ЛУ1, вырабатывающие сигнал v по сигналам конечных координат $x_к$, зоне стабилизации ε и текущих координат x для переключения структуры управления по следующему алгоритму

$$v = \begin{cases} 0, & \text{если } |x_k - x| > \varepsilon, \\ 1, & \text{если } |x_k - x| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Блок перехода БП вырабатывает также сигнал особого управления $U_{ос}$, который входит в оптимальную управляющую последова-

тельность $U_{\text{опт}}$, а также используется как входной сигнал для блока стабилизации БС, так как особое управление позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость некоторых состояний нелинейного объекта. Кроме того, использование особого управления $U_{\text{ос}}$ упрощает структуру управляющего устройства УУ, сопрягая к одной системе оптимальный переход и стабилизацию.

Основными факторами, влияющими на структуру блока перехода БП и определяющими необходимые элементы его структуры, являются следующие:

– структура блока перехода является переменной и зависит от количества граничных условий и особых траекторий, поэтому необходимы запоминающие элементы параметров особых и конечных траекторий и функциональные преобразователи для выработки уравнений особых и конечных траекторий;

– алгоритм работы блока перехода определяется топологической картиной оптимальных фазовых траекторий, точнее, отклонениями текущих координат от особых и конечных траекторий, поэтому необходимо логическое устройство, перестраивающее управляющее воздействие с релейного управления на особое;

– для выработки кусочно-постоянного управления необходим нелинейный элемент с релейной характеристикой;

– для получения непрерывного особого управления в зависимости от текущих координат необходим функциональный преобразователь;

– для переключения управляющего воздействия на объект по сигналам логического устройства необходим коммутатор.

На рис. 2.28 показана универсальная структура блока перехода, учитывающая наиболее общий случай задания множества граничных условий и множества особых траекторий.

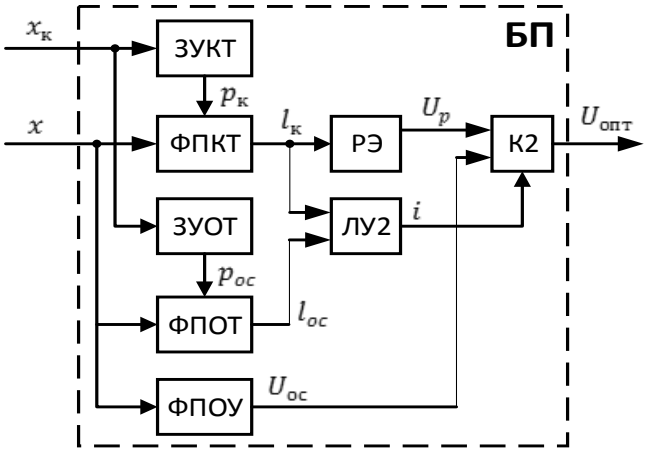

Рис. 2.28. Универсальная структура блока перехода БП

Блок перехода БП содержит:

– запоминающие устройства параметров конечных и особых траекторий ЗУКТ и ЗУОТ, вырабатывающих параметры аппроксимированных конечных и особых траекторий $p_{\text{к}}$ и p_{oc} по сигналу о требуемом конечном состоянии $x_{\text{к}}$;

– функциональные преобразователи конечных и особых траекторий ФПКТ и ФПОТ с выходными сигналами $l_{\text{к}}$ и l_{oc}, знаки которых зависят от отклонения текущей координаты от конечной и особой траекторий;

– функциональный преобразователь ФПОУ для получения особого управления U_{oc} в функции текущих координат объекта;

– релейный элемент РЭ для выработки релейного управления U_p;

– логическое устройство ЛУ2, оценивающее отклонения текущих координат от начальных и конечных траекторий с выходным сигналом i, синтез логического устройства проводится на основе топологической структуры оптимальных траекторий с помощью теории конечных автоматов;

– коммутатор К2, переключающий управление объекта с релейного на непрерывное особое по сигналам от логического устройства ЛУ2.

В конкретных примерах управления реальными объектами в зависимости от числа конечных и особых траекторий приведенная универсальная структура блока перехода упрощается за счет исключения некоторых блоков, например, при единственных граничных условиях исключается запоминающее устройство параметров конечной траектории ЗУКТ, при отсутствии особых траекторий исключаются блоки ЗУОТ, ФПОТ, ФПОУ; при единственной особой траектории не нужен блок ЗУОТ.

Для построения блока стабилизации БС используется свойство особого оптимального управления придавать асимптотическую устойчивость точке экстремума статической характеристики объекта. Для обеспечения устойчивости произвольного состояния объекта к особому управлению U_{oc}, вырабатываемому в блоке перехода, вводится аддитивная добавка управления $W(x_{\text{к}})$, такая, чтобы состоянием равновесия объекта с суммой особого управления $U_{oc}(x)$ и дополнительного управления $W(x_{\text{к}})$ была требуемая конечная точка $x_{\text{к}}$.

На рис. 2.29 приведена структура совмещенной системы, состоящей из блока перехода БП и блока стабилизации БС. Переключение с оптимального управления $U_{\text{опт}}$, вырабатываемого блоком перехода БП, на управление стабилизации $U_{\text{стаб}}$, получаемое в виде сум-

мы особого управления $U_{\text{ос}}$ из БП и дополнительного управления $W(x_{\text{к}})$ функционального преобразователя дополнительного управления ФПДУ в блоке стабилизации БС, производится коммутатором К1 по сигналу v с логического устройства ЛУ1 при попадании изображающей точки x в зону стабилизации ε конечных координат $x_{\text{к}}$.

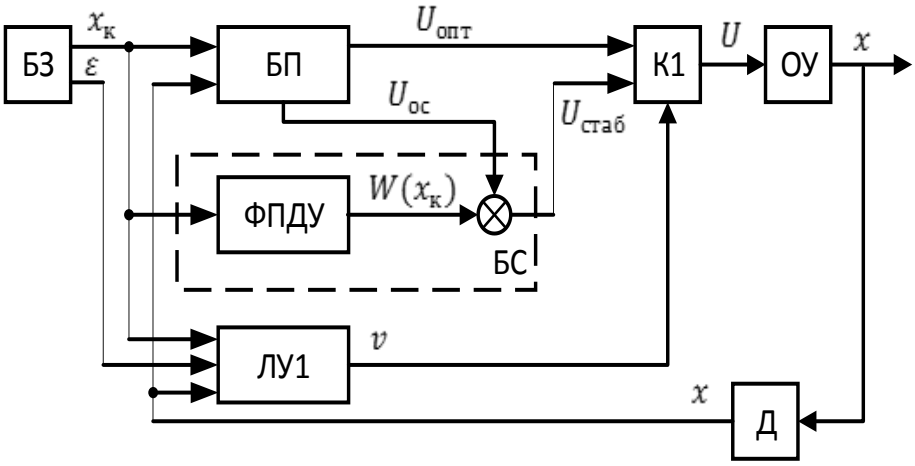

Рис. 2.29. Структура совмещенной системы

Комбинирование рассмотренных вариантов структур приводит к новой правильной и неизбыточной структуре, которая позволяет в упрощенном управляющем устройстве, состоящем из функционального преобразователя дополнительного управления блока стабилизации и функционального преобразователя особого управления блока перехода, получить квазиоптимальное управление со стабилизацией конечных координат. Структура квазиоптимального управляющего устройства КУУ приведена на рис. 2.30.

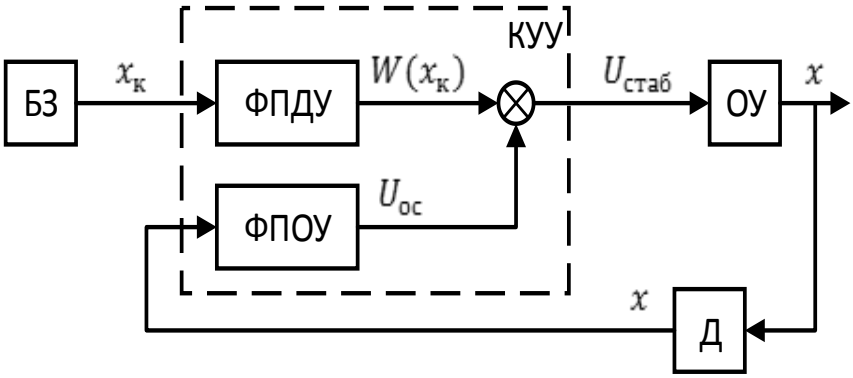

Рис. 2.30. Структура субоптимальной системы

Таким образом, рассмотренный неформализованный подход к синтезу структуры управляющих устройств оптимальных систем, базирующийся на информации о топологии траекторий и управлениях в подпространствах координат, позволяет выявить не только укрупнен-

ные блоки структуры и необходимые типовые элементы, но и новые структуры. Данный подход может служить основой для создания информационного обеспечения процесса проектирования, а также создания и применения формализованных методов синтеза структуры.

2.5. ПРОГРАММНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОСОБОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Исследование и анализ особых ситуаций даже для относительно простых объектов может быть весьма трудоёмким, выражения для определителей матриц $det\ D$ получаются очень громоздкими, их анализ в общем виде практически невозможен.

В настоящее время большинство исследований и обработка полученных результатов производится с помощью специализированного программного обеспечения, наиболее целесообразного для каждой конкретной задачи. Скорость и объём вычислений современных компьютеров, мощные комплексы универсальных и специализированных программных пакетов позволяют проводить в различных отраслях науки всесторонние исследования различными методами [19, 116].

Средства автоматизации инженерных расчётов, анализа и симуляции физических процессов CAE (computer-aided engineering) осуществляют динамическое моделирование, проверку и оптимизацию изделий. Расчётная часть таких пакетов программ чаще всего основана на различных методах решения дифференциальных уравнений и численных методах. Для анализа особых ситуаций и поиска оптимальных управлений удобно использовать математические пакеты программ – системы компьютерной алгебры: Mathcad, MATLAB [27, 63, 112, 117, 127], Mathematica [117], Maple [2, 60, 117]. В данном случае использованы система Maple как обладающая самыми развитыми средствами символьных вычислений и решения дифференциальных уравнений, и система MATLAB для блочно-структурного моделирования и расчёта отдельных систем управления [29–32, 109, 145].

Программы нахождения особого управления должны оценить исходные дифференциальные уравнения объекта управления и подынтегрального выражения в критерии оптимальности, в зависимости от компонентов данных дифференциальных уравнений определить размерность векторов, составляющих матрицу D проверки УОП, по одному из рекуррентных соотношений (1-5), (1-9), (1-13), (1-20), (1-37) или (1-76) вычислить векторы B_j, составить матрицу D и из определителя матрицы D найти особые траектории и управление.

2.5.1. Алгоритм программы поиска особого управления в Maple

На рис. 2.31 представлен алгоритм программы в Maple поиска особого управления для системы дифференциальных уравнений (2-1) и критерия $I = \int_0^T x_1 dt$, на рис. 2.32 – подпрограмма вычисления начальных компонентов для рекуррентного уравнения, на рис. 2.33–2.39 – подпрограммы описания используемых процедур, на рис. 2.40 – алгоритм выбора подпрограммы для формирования матрицы D из векторов B_j, на рис. 2.41–2.44 – подпрограммы формирования матрицы D из векторов B_j, на рис. 2.45 – алгоритм нахождения особого управления в виде алгебраического уравнения (если возможно) или в виде дифференциального уравнения относительно исходных координат.

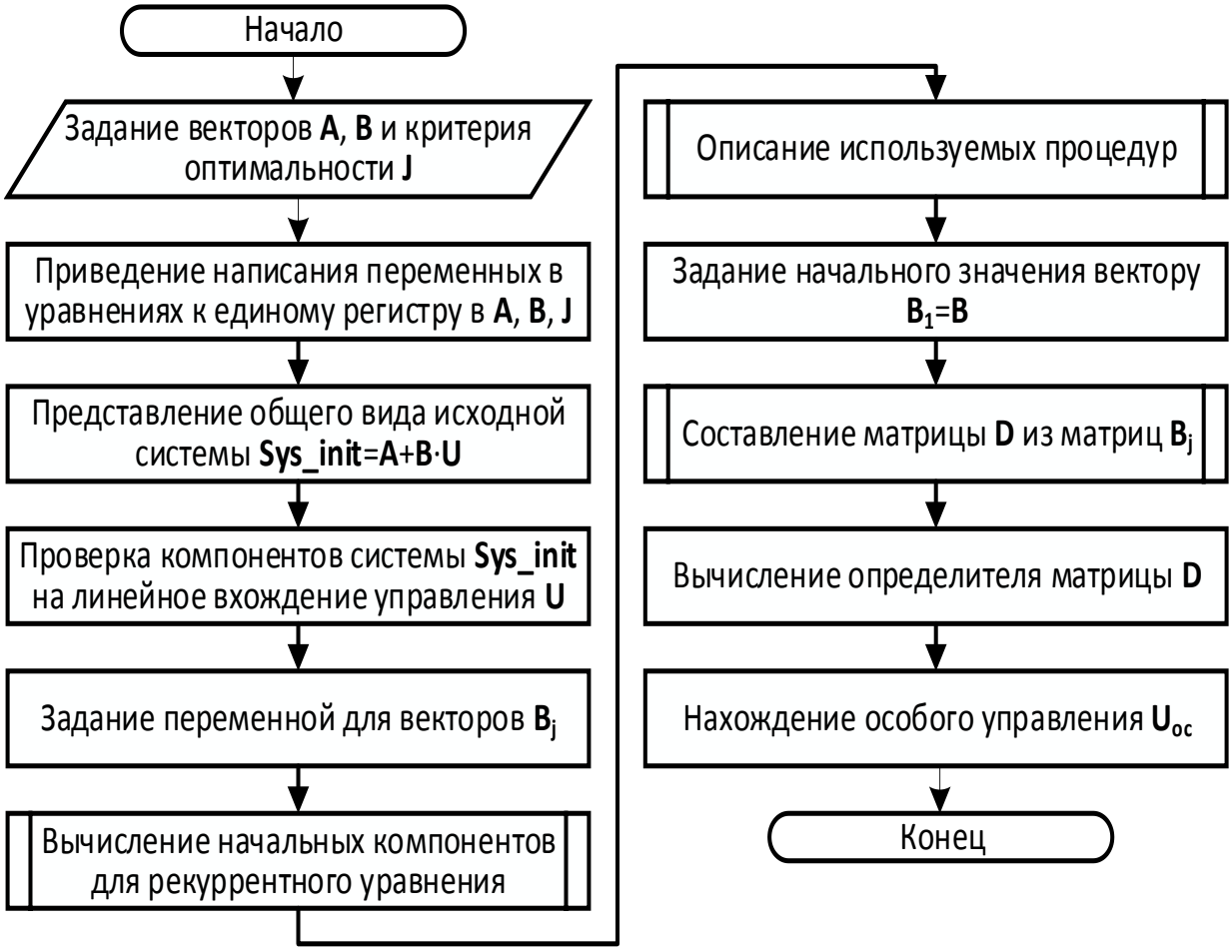

Рис. 2.31. Алгоритм программы в Maple

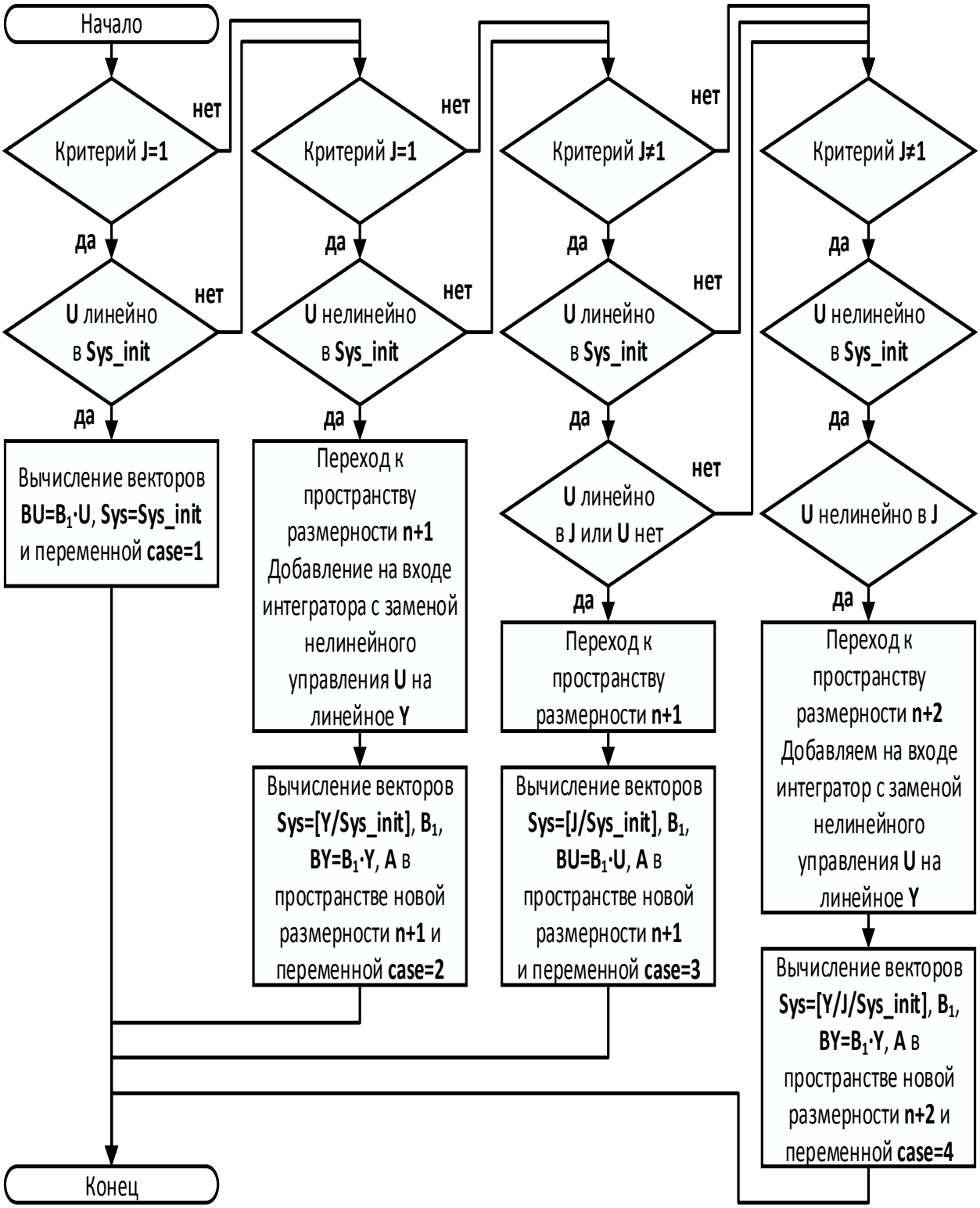

Рис. 2.32. Подпрограмма вычисления
начальных компонентов для рекуррентного уравнения

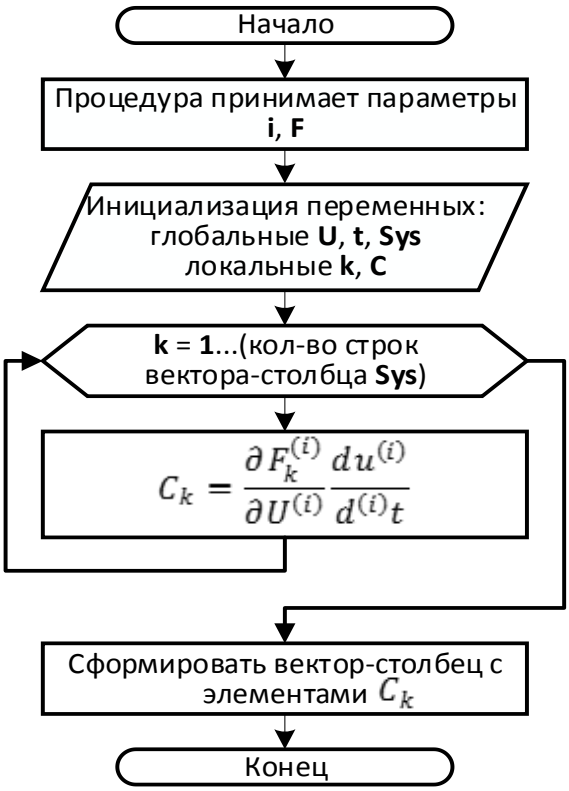

Рис. 2.33. Процедура
procedure_1

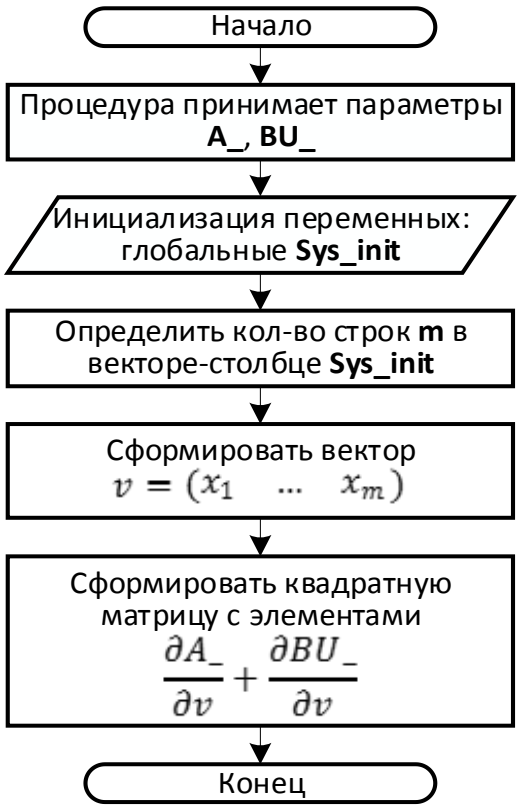

Рис. 2.34. Процедура
procedure_2

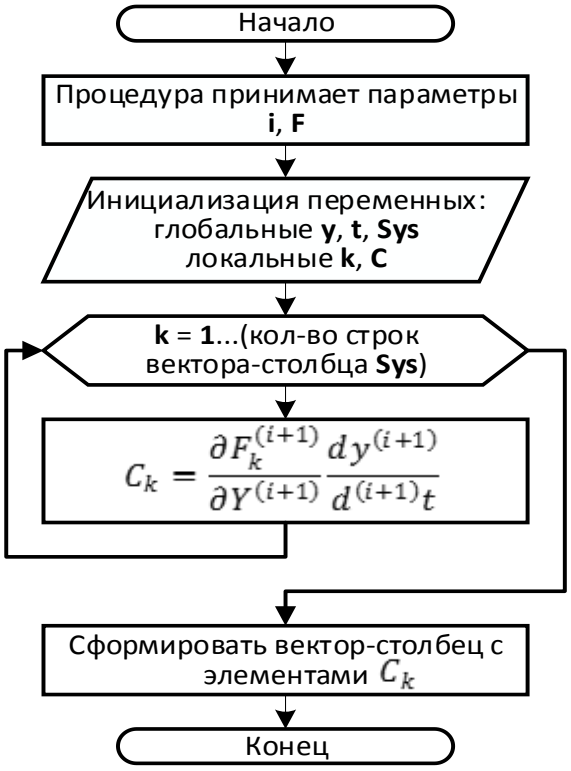

Рис. 2.35. Процедура
procedure_3

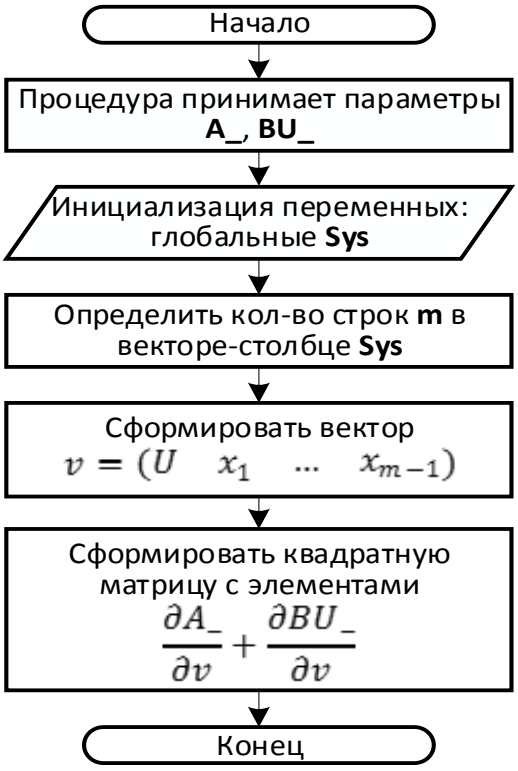

Рис. 2.36. Процедура
procedure_4

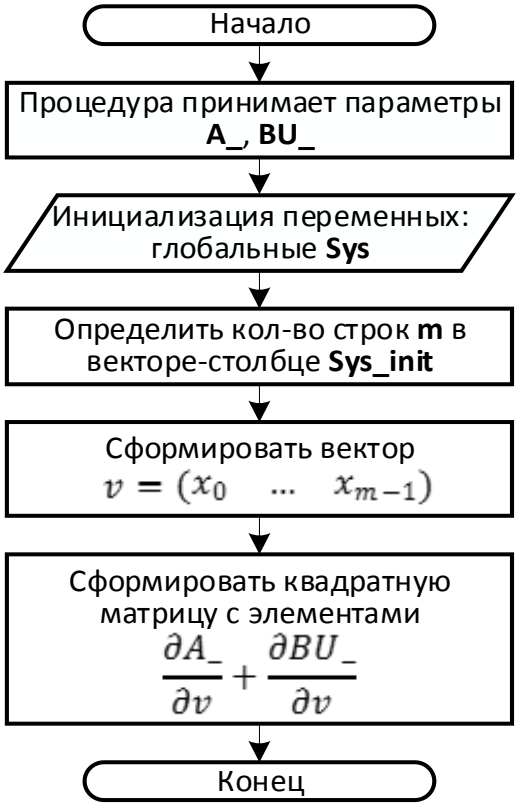

Рис. 2.37. Процедура **procedure_5**

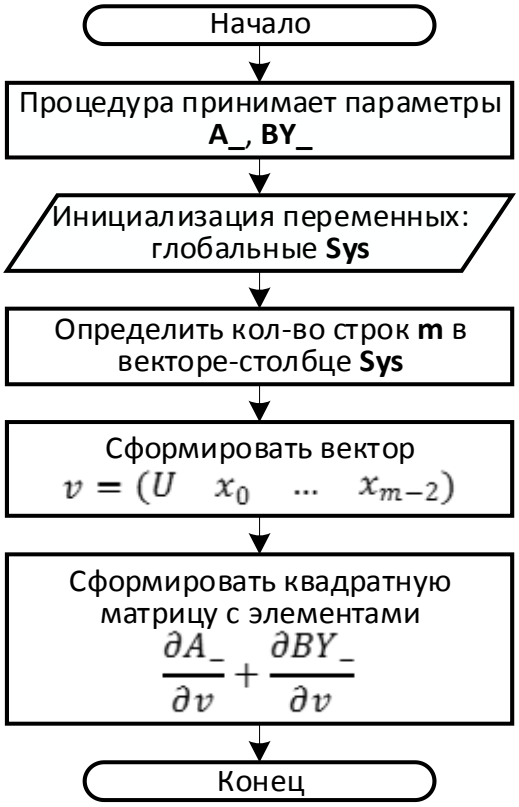

Рис. 2.38. Процедура **procedure_6**

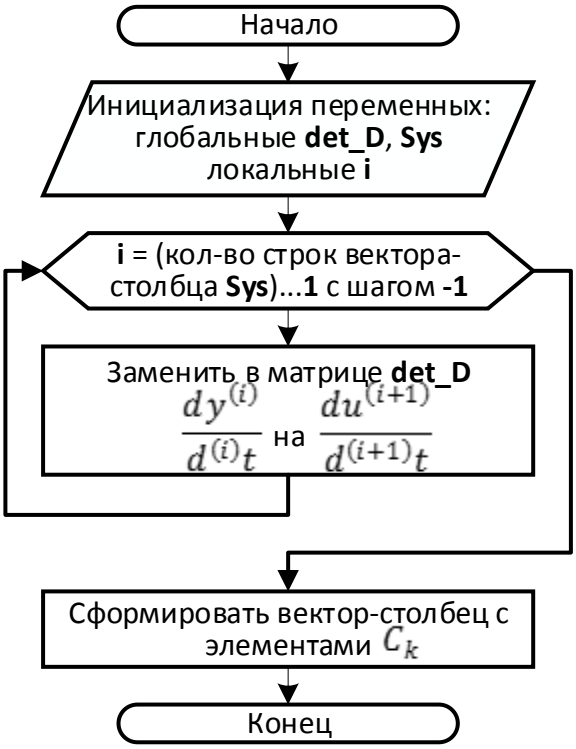

Рис. 2.39. Процедура **procedure_7**

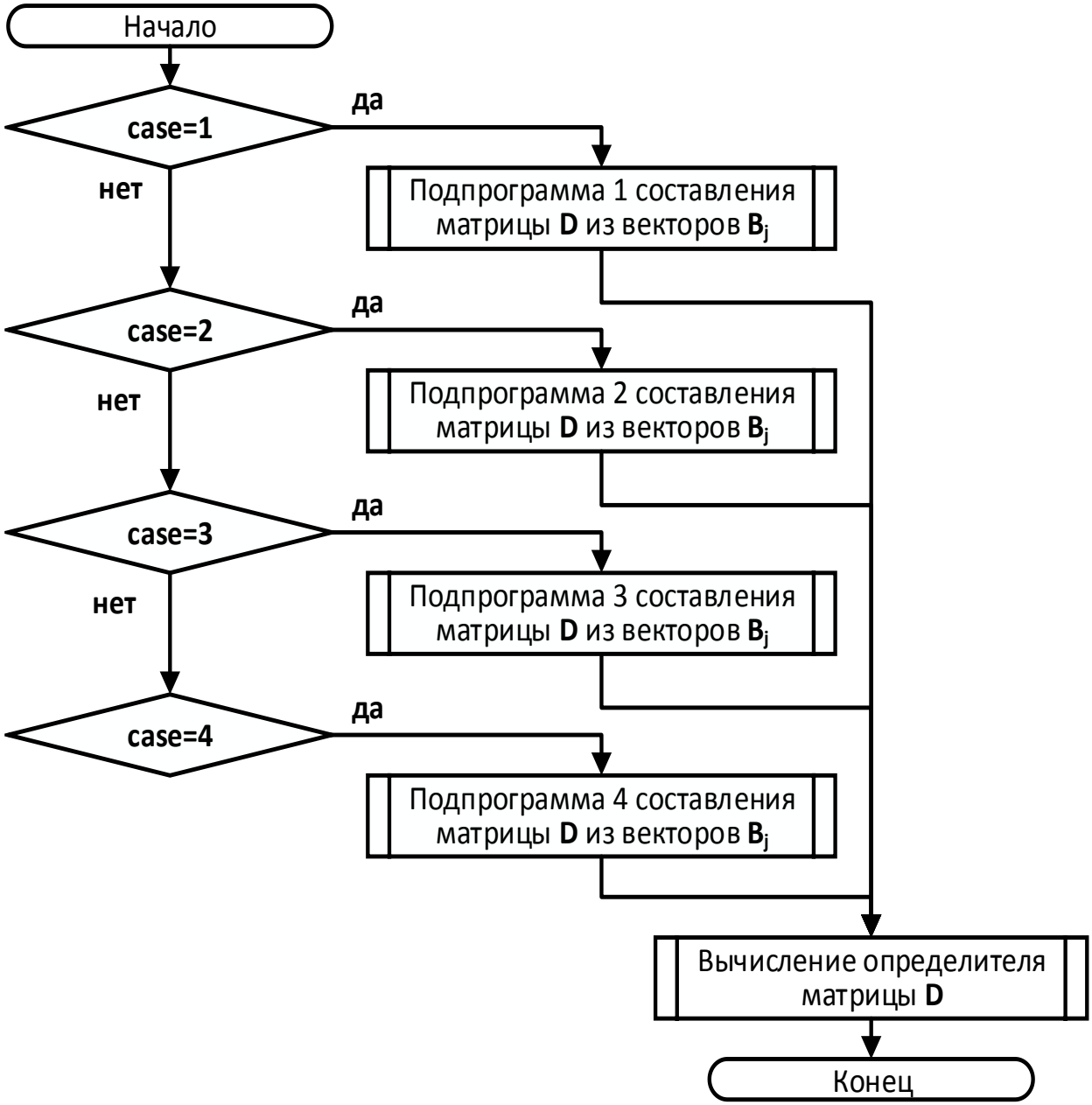

Рис. 2.40. Выбор подпрограммы формирования матрицы D из векторов B_j

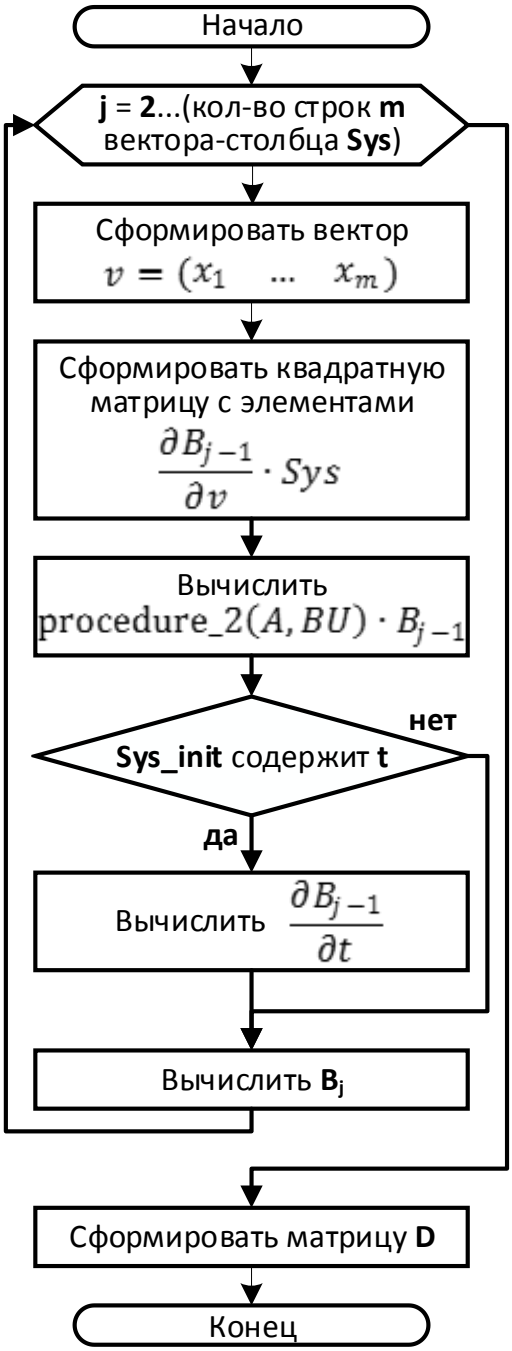

Рис. 2.41. Подпрограмма 1 формирования матрицы D из векторов B_j

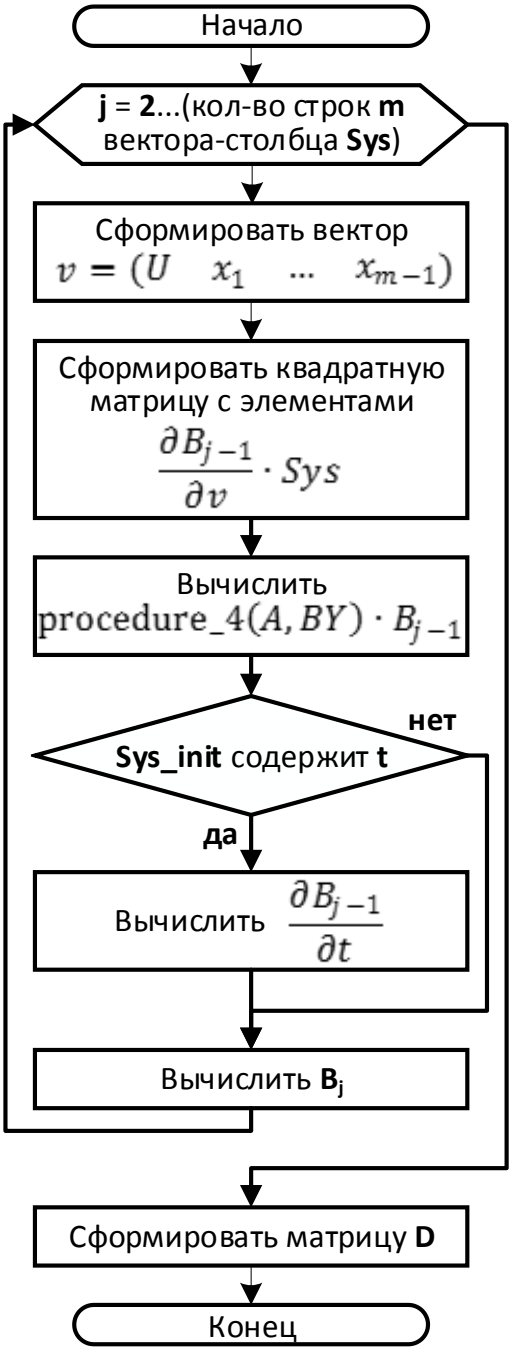

Рис. 2.42. Подпрограмма 2 формирования матрицы D из векторов B_j

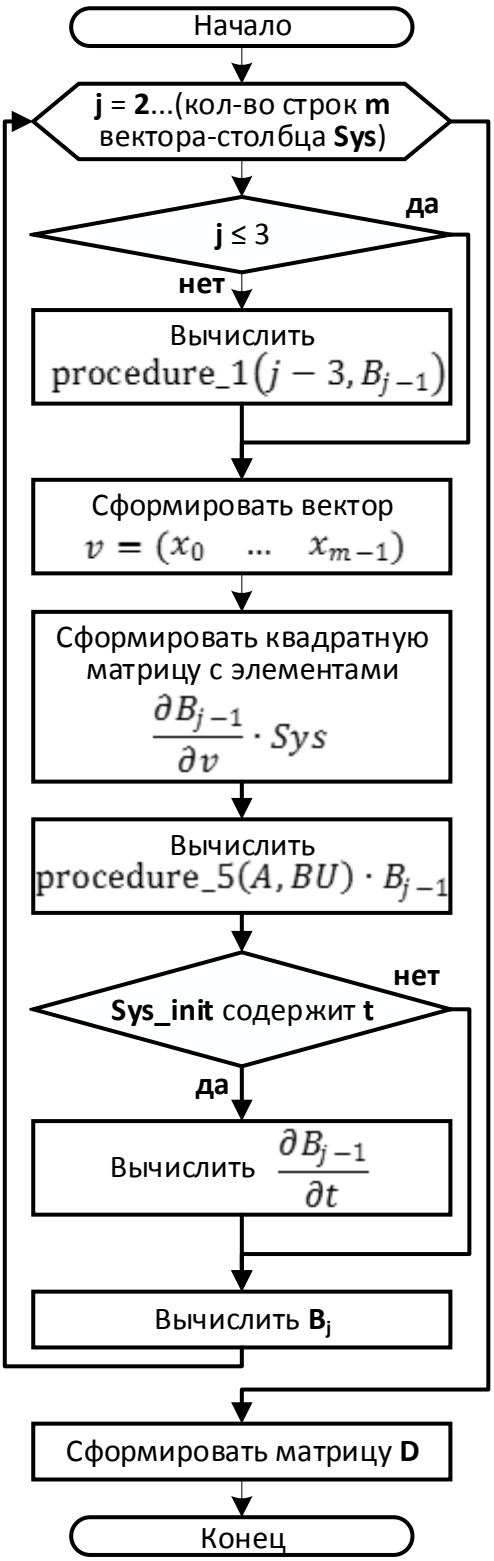

Рис. 2.43. Подпрограмма 3 формирования матрицы D из векторов B_j

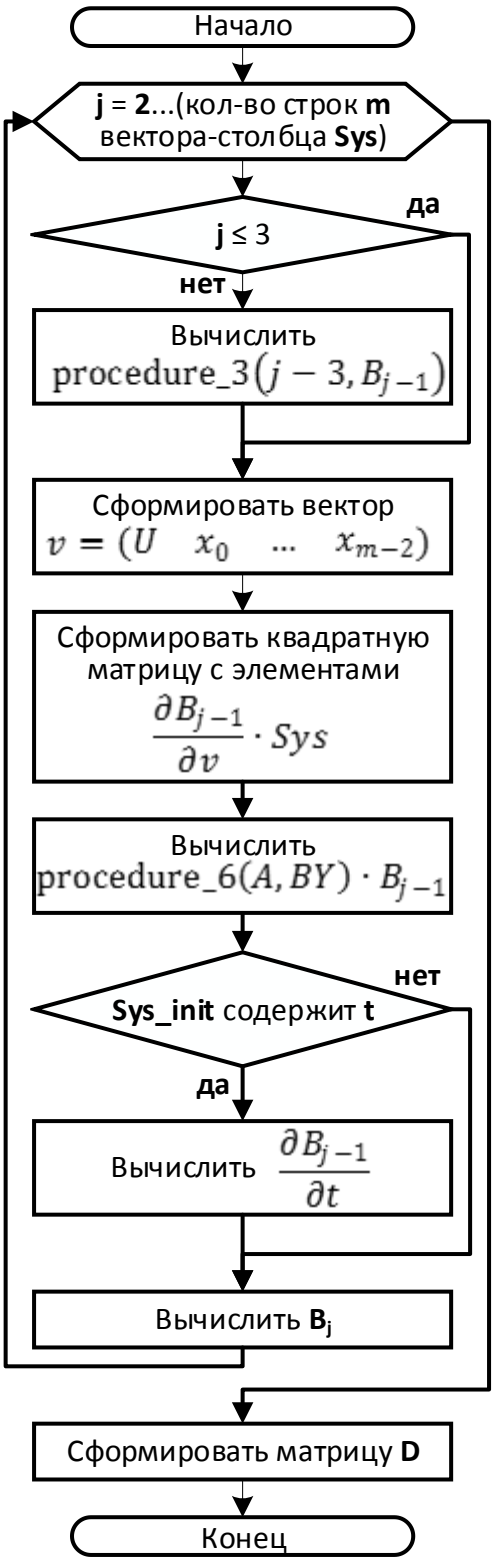

Рис. 2.44. Подпрограмма 4 формирования матрицы D из векторов B_j

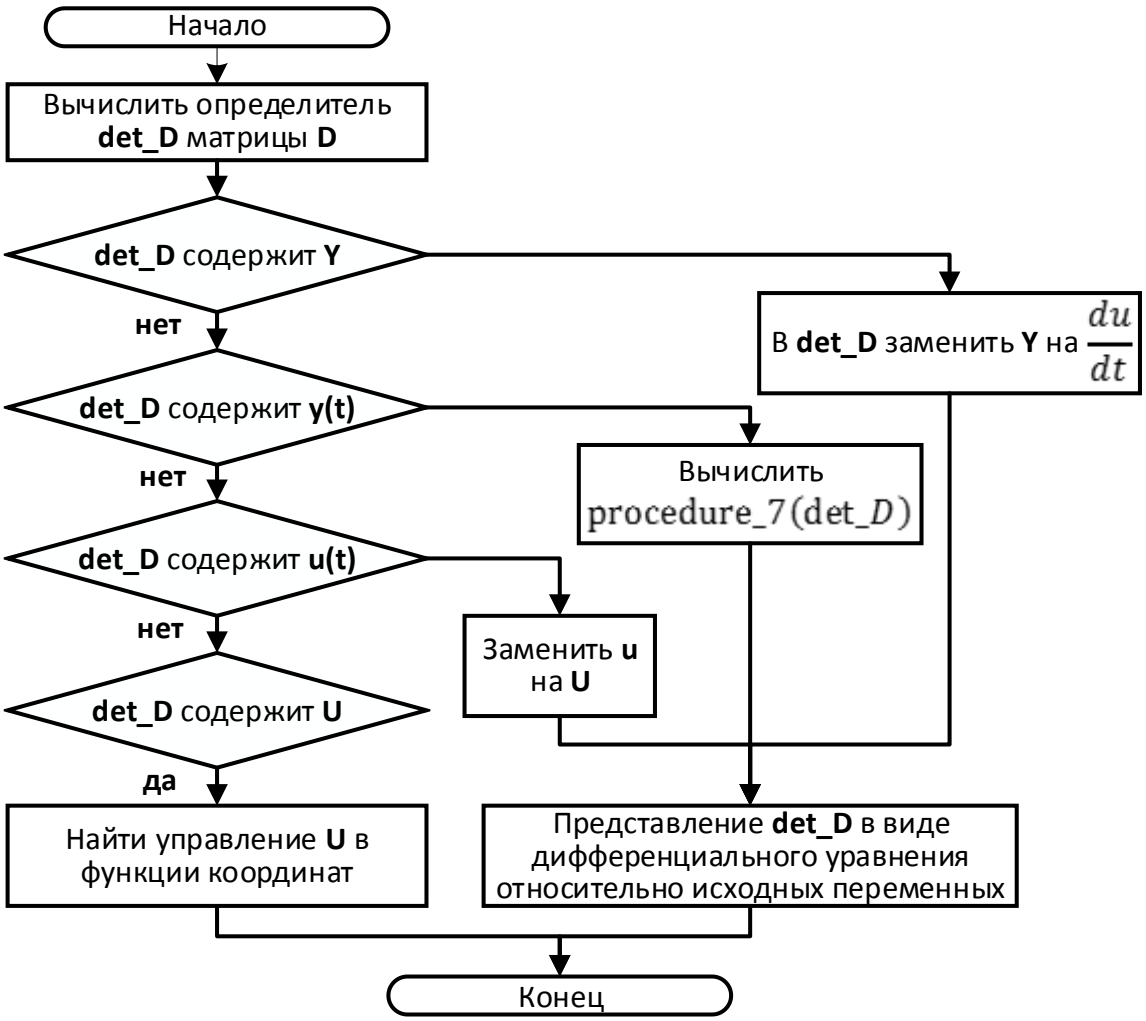

Рис. 2.45. Алгоритм нахождения особого управления

2.5.2. Листинг программы в Maple

```
> restart;
> # Подключение пакетов
> with(LinearAlgebra): with(linalg):
>
> # Задать вектор A
> A:=Vector[column]([a11*x1,
a21*x1+a22*x1^2*x2+mu(x2)]);
```

$$A := \begin{bmatrix} a11\,x1 \\ a21\,x1 + a22\,x1^2\,x2 + \mu(x2) \end{bmatrix}$$

```
>
> # Задать вектор B1
> B1:=Vector[column]([b, 0]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```

```
> # Задать вид критерия оптимальности
> J:=x1;
```

$$J := x1$$

```
>
> # Тело программы
>
> # Проверка вида исходной системы
> Sys_init:=A+B1*U;
```

$$Sys_init := \begin{bmatrix} Ub + a11\,x1 \\ a21\,x1 + a22\,x1^2\,x2 + \mu(x2) \end{bmatrix}$$

```
>
> # Приведение написания переменных в уравнениях-
векторах к единому регистру
> A:=subs(u=U,u(t)=U,U(t)=U,op(map(i-
>subs(X||i=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))])),op
(map(i-
>subs(X||i(t)=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))]))
,op(map(i-
>subs(x||i(t)=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))]))
,A);
```

$$A := \begin{bmatrix} a11\,x1 \\ a21\,x1 + a22\,x1^2\,x2 + \mu(x2) \end{bmatrix}$$

```
> B1:=subs(u=U,u(t)=U,U(t)=U,op(map(i-
>subs(X||i=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))])),op
(map(i-
>subs(X||i(t)=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))]))
,op(map(i-
>subs(x||i(t)=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))]))
,B1);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> J:=subs(u=U,u(t)=U,U(t)=U,op(map(i-
>subs(X||i=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))])),op
(map(i-
>subs(X||i(t)=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))]))
,op(map(i-
>subs(x||i(t)=x||i),[seq(i,i=1..op(1,Sys_init))]))
,J);
```

$$J := x1$$

```
>
> # Проверка компонентов исходной системы
Sys_initна линейное вхождение управления U
>
Sys_init_linear_control_check:=sum('diff(Sys_init[
i],U$2)','i'=1..op(1,Sys_init));
```

$$Sys_init_linear_control_check := 0$$

```
>
> # Проверка критерия J на наличие модуля управле-
ния |U|
> if (has(J,abs(U))=true) then
>
> if (J=abs(U)) then
> J_b1:=1; print("J_b1=",J_b1);
> J_bu:=J; print("J_bu=",J_bu);
> J_a:=0; print("J_a=",J_a);
> J_:=1; print(1);
>
> elif ((nops(J)=2) and (op(1,J)*op(2,J)=J)) then
> J_b1:=remove(has,J,abs(U)); print("J_b1=",J_b1);
> J_bu:=J; print("J_bu=",J_bu);
> J_a:=0; print("J_a=",J_a);
> J_:=2; print(2);
>
> else
> J_b1:=select(has,J,abs(U))/abs(U);
print("J_b1=",J_b1);
> J_bu:=select(has,J,abs(U)); print("J_bu=",J_bu);
> J_a:=J-select(has,J,abs(U)); print("J_a=",J_a);
> J_:=3; print(3);
> end if;
>
> end if;
>
> # Задание переменной для векторов Bj
> B:=Array(0..10^4);
```

$$B := \begin{bmatrix} 0 .. 10000\ Array \\ Data\ Type: anything \\ Storage: rectangular \\ Order: Fortran_order \end{bmatrix}$$

```
>
> # Вычисление начальных компонентов для рекур-
рентного уравнения
> if ((J=1) and (Sys_init_linear_control_check=0))
then
> Sys:=Sys_init;
> BU:=convert(evalm(B1*U),Vector[column]);
> case:=1;
>
> elif ((J=1) and
(Sys_init_linear_control_check<>0)) then
>
Sys:=convert(stackmatrix(vector([Y]),convert(Sys_i
nit,matrix)), Vector[column]);
> B1:=convert(jacobian(Sys,[Y]), Vector[column]);
> BY:=convert(evalm(B1*Y),Vector[column]);
> A:=M-BY;
> case:=2;
>
> elif (((J<>1) and
(Sys_init_linear_control_check=0)) and
((diff(J,U)=0) or (diff(J,U$2)=0) or
(has(J,abs(U))))) then
>
Sys:=convert(stackmatrix(Vector[column]([J]),conve
rt(Sys_init,matrix)), Vector[column]);
> if ((diff(J,U)=0) or (diff(J,U$2)=0)) then
> B1:=convert(jacobian(Sys,[U]), Vector[column]);
> print("B1=",B1);
> BU:=convert(evalm(B1*U),Vector[column]);
> print("BU=",BU);
> A:=Sys-BU;
> print("A=",A);
> elif (has(J,abs(U))) then
> J_a:=Vector[column]([J_a]);
> print("J_a=",J_a);
> J_b1:=Vector[column]([J_b1]);
> print("J_b1=",J_b1);
> J_bu:=Vector[column]([J_bu]);
```

```
> print("J_bu=",J_bu);
> b1:=convert(jacobian(Sys_init,[U]), Vec-
tor[column]);
> print("b1=",b1);
> bu:=convert(evalm(b1*U),Vector[column]);
> print("bu=",bu);
> a1:=Sys_init-bu; print("a1=",a1);
> A:=convert(stackmatrix(J_a,convert(a1,matrix)),
Vector[column]);
> print("A=",A);
>
B1:=convert(stackmatrix(J_b1,convert(b1,matrix)),
Vector[column]);
> print("B1=",B1);
>
BU:=convert(stackmatrix(J_bu,convert(bu,matrix)),
Vector[column]);
> print("BU=",BU);
> end if;
> case:=3;
>
> elif ((J<>1) and (((diff(J,U$2)<>0) and
(Sys_init_linear_control_check=0) and
(has(J,abs(U))=false)) or
(Sys_init_linear_control_check<>0))) then
>
Sys:=convert(stackmatrix(Vector[column]([J]),conve
rt(Sys_init,matrix)), Vector[column]);
>
Sys:=convert(stackmatrix(vector([Y]),convert(Sys,m
atrix)), Vector[column]);
> B1:=convert(jacobian(Sys,[Y]), Vector[column]);
> BY:=convert(evalm(B1*Y),Vector[column]);
> A:=M-BY;
> case:=4;
>
> end if;
```

$$Sys := \begin{bmatrix} x1 \\ Ub + a11\,x1 \\ a21\,x1 + a22\,x1^2\,x2 + \mu(x2) \end{bmatrix}$$

$$\text{"B1="}, \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{"BU="}, \begin{bmatrix} 0 \\ Ub \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{"A="}, \begin{bmatrix} x1 \\ a11\,x1 \\ a21\,x1 + a22\,x1^2\,x2 + \mu(x2) \end{bmatrix}$$

$$case := 3$$

```
>
> # Описание используемых процедур
> procedure_1:=proc(i,F)
> global U,t,Sys;
> local k,C;
> for k from 1 to op(1,Sys) do
> C[k]:=diff(F[k],U$(i))*diff(u(t),t$(i));
> end do;
> Vector[column](op(1,Sys),(k)->C[k]);
> end;
```

```
procedure_1 := proc(i, F)
    local k, C;
    global U, t, Sys;
    for k to op(1, Sys) do C[k] := (diff(F[k], U$i)) * (diff(u(t), t$i)) end do;
    Vector[column](op(1, Sys), k→C[k])
end proc
```

```
>
> procedure_2:=proc(A_,BU_)
> global Sys_init;
> con-
vert(evalm(jacobian(A_,[seq(x||i,i=1..op(1,Sys_ini
t))])+jacobian(BU_,[seq(x||i,i=1..op(1,Sys_init))]
)),matrix);
> end;
```

```
procedure_2 := proc(A_, BU_)
    global Sys_init;
    convert(evalm(linalg:-jacobian(A_, [seq(x || i, i = 1 ..op(1, Sys_init))]) + linalg:-
    jacobian(BU_, [seq(x || i, i = 1 ..op(1, Sys_init))])), linalg:-matrix)
end proc
```

```
>
> procedure_3:=proc(i,F)
> global y,t,Sys;
> local k,C;
> for k from 1 to op(1,Sys) do
> C[k]:=diff(F[k],Y$(i+1))*diff(y(t),t$(i+1));
> end do;
> Vector[column](op(1,Sys),(k)->C[k]);
> end;
```

```
procedure_3 := proc(i, F)
    local k, C;
    global y, t, Sys;
    for k to op(1, Sys) do C[k] := (diff(F[k], Y$i + 1)) * (diff(y(t), t$i + 1)) end do;
    Vector[column](op(1, Sys), k→C[k])
end proc
```

```
>
> procedure_4:=proc(A_,BU_)
> global Sys;
> con-
vert(evalm(jacobian(A_,[U,seq(x||i,i=1..op(1,Sys)-
1)])+jacobian(BU_,[U,seq(x||i,i=1..op(1,Sys)-
1)])),matrix);
> end;
```

```
procedure_4 := proc(A_, BU_)
    global Sys;
    convert(evalm(linalg:-jacobian(A_, [U, seq(x || i, i = 1 ..op(1, Sys) − 1)]) + linalg:-
    jacobian(BU_, [U, seq(x || i, i = 1 ..op(1, Sys) − 1)])), linalg:-matrix)
end proc
```

```
>
> procedure_5:=proc(A_,BU_)
> global Sys;
> con-
vert(evalm(jacobian(A_,[seq(x||i,i=0..op(1,Sys)-
1)])+jacobian(BU_,[seq(x||i,i=0..op(1,Sys)-
1)])),matrix);
> end;
```

```
procedure_5 := proc(A_, BU_)
    global Sys;
    convert(evalm(linalg:-jacobian(A_, [seq(x || i, i = 0 ..op(1, Sys) − 1)]) + linalg:-
    jacobian(BU_, [seq(x || i, i = 0 ..op(1, Sys) − 1)])), linalg:-matrix)
end proc
```

```
>
> procedure_6:=proc(A_,BY_)
> global Sys;
> con-
vert(evalm(jacobian(A_,[U,seq(x||i,i=0..op(1,Sys)-
2)])+jacobian(BY_,[U,seq(x||i,i=0..op(1,Sys)-
2)])),matrix);
> end;
```

```
procedure_6 := proc(A_, BY_)
    global Sys;
    convert(evalm(linalg:-jacobian(A_, [U, seq(x || i, i = 0 ..op(1, Sys) − 2)]) + linalg:-
    jacobian(BY_, [U, seq(x || i, i = 0 ..op(1, Sys) − 2)])), linalg:-matrix)
end proc
```

```
>
> procedure_7:=proc()
> global det_D,Sys;
> local i;
> for i from op(1,Sys) by -1 to 1 do
>
det_D:=subs(diff(y(t),t$i)=diff(u(t),t$(i+1)),det_
D);
> end do;
> end;
```

```
procedure_7 := proc( )
    local i;
    global det_D, Sys;
    for i from op(1, Sys) by − 1 to 1 do
        det_D := subs(diff(y(t), t$i) = diff(u(t), t$i + 1), det_D)
    end do
end proc
```

```
>
> # Задание начального значения вектору B[1]
> B[1]:=B1;
```

$$B_1 := \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
>
> # Составление матрицы D из матриц B[i]
> if (case=1) then
> for j from 2 to op(1,Sys) do
> part_1:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> print(`part_1=`,part_1);
> part_2:=convert(multiply(convert(jacobian(B[j-
1],[seq(x||i,i=1..op(1,Sys))]),matrix),Sys),Vector
[column]);
> print(`part_2=`,part_2);
>
part_3:=convert(multiply(convert(procedure_2(A,BU)
,matrix),convert(B[j-1], Vec-
tor[column])),Vector[column]);
> print(`part_3=`,part_3);
> if has(Sys_init,t) then
part_4:=convert(jacobian(B[j-
1],[t]),Vector[column]) else
part_4:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> end if;
> print(`part_4=`,part_4);
> B[j]:=convert(part_1+part_2-
part_3+part_4,Vector[column]);
> print("B",j,"=",B[j]);
> end do;
> ma-
trix_D:=convert(augment(seq(B[j],j=1..op(1,Sys))),
Matrix);
> end if;
>
> if (case=2) then
> for j from 2 to op(1,Sys) do
> #if (j<=3) then
> part_1:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> print(`part_1=`,part_1);
> part_2:=convert(multiply(convert(jacobian(B[j-
1],[U,seq(x||i,i=1..op(1,Sys)-1)]), ma-
trix),Sys),Vector[column]);
> print(`part_2=`,part_2);
```

```
>
part_3:=convert(multiply(convert(procedure_4(A,BY)
,matrix),convert(B[j-1], Vec-
tor[column])),Vector[column]);
> print(`part_3=`,part_3);
> if has(Sys_init,t) then
part_4:=convert(jacobian(B[j-
1],[t]),Vector[column]) else
part_4:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> end if;
> print(`part_4=`,part_4);
> B[j]:=convert(part_1+part_2-
part_3+part_4,Vector[column]);
> print("B",j,"=",B[j]);
> end do;
> ma-
trix_D:=convert(augment(seq(B[j],j=1..op(1,Sys))),
Matrix);
> end if;
>
> if (case=3) then
> for j from 2 to op(1,Sys) do
> if (j<=3) then
> part_1:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> else
> part_1:=procedure_1(j-3,B[j-1]);
> end if;
> print(`part_1=`,part_1);
> part_2:=convert(multiply(convert(jacobian(B[j-
1],[seq(x||i,i=0..op(1,Sys)-1)]), ma-
trix),Sys),Vector[column]);
> print(`part_2=`,part_2);
>
part_3:=convert(multiply(convert(procedure_5(A,BU)
,matrix),convert(B[j-1], Vec-
tor[column])),Vector[column]);
> print(`part_3=`,part_3);
> if has(Sys_init,t) then
part_4:=convert(jacobian(B[j-
```

```
1],[t]),Vector[column]) else
part_4:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> end if;
> print(`part_4=`,part_4);
> B[j]:=convert(part_1+part_2-
part_3+part_4,Vector[column]);
> print("B",j,"=",B[j]);
> end do;
> ma-
trix_D:=convert(augment(seq(B[j],j=1..op(1,Sys))),
Matrix);
> end if;
>
> if (case=4) then
> for j from 2 to op(1,Sys) do
> if (j<=3) then
> part_1:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> else
> part_1:=procedure_3(j-3,B[j-1]);
> end if;
> print(`part_1=`,part_1);
> part_2:=convert(multiply(convert(jacobian(B[j-
1],[U,seq(x||i,i=0..op(1,Sys)-2)]), ma-
trix),Sys),Vector[column]);
> print(`part_2=`,part_2);
>
part_3:=convert(multiply(convert(procedure_6(A,BY)
,matrix),convert(B[j-1], Vec-
tor[column])),Vector[column]);
> print(`part_3=`,part_3);
> if has(Sys_init,t) then
part_4:=convert(jacobian(B[j-
1],[t]),Vector[column]) else
part_4:=Vector[column](op(1,Sys),(i)->0);
> end if;
> print(`part_4=`,part_4);
> B[j]:=convert(part_1+part_2-
part_3+part_4,Vector[column]);
> print("B",j,"=",B[j]);
```

```
> end do;
> ma-
trix_D:=convert(augment(seq(B[j],j=1..op(1,Sys))),
Matrix);
> end if;
>
```

$$part_1=, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$part_2=, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$part_3=, \begin{bmatrix} b \\ a11\, b \\ (2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, b \end{bmatrix}$$

$$part_4=, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{"B", 2, "=", } \begin{bmatrix} -b \\ -a11\, b \\ -(2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, b \end{bmatrix}$$

$$part_1=, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$part_2=, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\, a22\, x2\, b\, (Ub + a11\, x1) - 2\, a22\, x1\, b \left(a21\, x1 + a22\, x1^2\, x2 + \mu(x2)\right) \end{bmatrix}$$

$$part_3=, \begin{bmatrix} -a11\, b \\ -a11^2\, b \\ -(2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, a11\, b - \left(a22\, x1^2 + \frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) (2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, b \end{bmatrix}$$

$$part_4=, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{"B", 3, "=", } \Big[\Big[a11\, b\Big], \Big[a11^2\, b\Big], \Big[-2\, a22\, x2\, b\, (Ub + a11\, x1) - 2\, a22\, x1\, b \left(a21\, x1 + a22\, x1^2\, x2 + \mu(x2)\right) + (2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, a11\, b + \left(a22\, x1^2 + \frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) (2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, b\Big]\Big]$$

$$matrix_D := \left[\left[0, -b, a11\, b\right], \left[b, -a11\, b, a11^2\, b\right], \left[0, -(2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, b, -2\, a22\, x2\, b\, (U b + a11\, x1) - 2\, a22\, x1\, b \left(a21\, x1 + a22\, x1^2\, x2 + \mu(x2)\right) + (2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, a11\, b + \left(a22\, x1^2 + \frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) (2\, a22\, x1\, x2 + a21)\, b\right]\right]$$

```
>
> u:=false;
```

$$u := false$$

```
>
> # Вычисление определителя матрицы D
> det_D:=Determinant(matrix_D);
```

$$det_D := -b^3 \left(-2 \left(\frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) a22\, x1\, x2 + 2\, U\, a22\, b\, x2 + 2\, a11\, a22\, x1\, x2 + a21\, a22\, x1^2 + 2\, \mu(x2)\, a22\, x1 - \left(\frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) a21\right)$$

```
>
> # Нахождение вида управления в функции координат
> if ((has(det_D,Y)=false) and
(has(det_D,y(t))=false) and
(has(det_D,u(t))=false) and (has(det_D,U)=true))
then
> `U`:=simplify(solve(det_D,U));
> u:=true;
    > end if;
```

$$U := -\frac{1}{2}\, \frac{1}{b\, a22\, x2} \left(-2 \left(\frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) a22\, x1\, x2 + 2\, a11\, a22\, x1\, x2 + a21\, a22\, x1^2 + 2\, \mu(x2)\, a22\, x1 - \left(\frac{d}{dx2}\, \mu(x2)\right) a21\right)$$

$$u := true$$

```
>
> if ((has(det_D,Y)=false) and
(has(det_D,y(t))=false) and
(has(det_D,u(t))=true)) then
> `det_D`:=subs(u=U,det_D);
> end if;
>
> if (has(det_D,y(t))) then
```

```
> `det_D`:=procedure_7(det_D);
> end if;
>
> if (has(det_D,Y)) then
> `det_D`:=simplify(subs(Y=diff(u(t),t),det_D));
> end if;
```

2.5.3. Листинг программы вычисления особого управления в системе MATLAB

В пакете MATLAB собственные символьные средства вычисления развиты не так сильно, как в Maple. Однако в состав MATLAB входит Symbolic Math Toolbox, реализующий интерфейс между средой MATLAB и библиотекой функций, являющихся вычислительным ядром Maple, причём работа в MATLAB не требует установки Maple. Данный Toolbox позволяет использовать ресурсы ядра Maple практически в полном объёме.

Для упрощения кода программы на языке MATLAB представим задачу, аналогичную приведённой в п. 2.4.1, но с существенными ограничениями.

Так, в критерий не входит управление, а в исходном дифференциальном уравнении управление линейно, что позволяет заранее знать размерность расширенного пространства координат (равное 3), что, в свою очередь, исключает из рекуррентного соотношения (1-76) первый компонент; известно, что объект стационарный, что исключает из рекуррентного соотношения последний компонент; в критерий не входит управление в нелинейном виде, что позволяет не ставить на входе системы интегратор, повышающий размерность пространства координат на единицу.

С учётом данных ограничений ниже приведён листинг программы на языке MATLAB.

```
% Очистка командного окна
clear;
clc;
% Объявление символьных переменных
syms x0 x1 x2 U a11 a21 a22 b mu(x2);
% Задание вектора координат в расширенном про-
странстве
v = [x0, x1, x2];
```

```
% Вывод на экран вектора координат v
disp(v);
% Задание вектора A в расширенном пространстве ко-
ординат
A = [x1; a11*x1; a21*x1+a22*x1^2*x2+mu(x2)];
disp(A);
% Задание вектора B = B1 в расширенном пространст-
ве координат
B = [0; b; 0];
disp(B);
% Вычисление вектора BU
BU = B * U;
disp(BU);
% Вычисление всей системы дифференциальных уравне-
ний
% в расширенном пространстве координат
Sys = A + B*U;
disp(Sys);
% Вычисление якобиана вектора A по вектору v
jacob_A = jacobian(A, v);
disp(jacob_A);
% Вычисление якобиана вектора BU по вектору v
jacob_BU = jacobian(BU, v);
disp(jacob_BU);

% Задание массива ячеек с числом элементов равным
% размерности расширенного пространства координат
b = cell(1,length(Sys));
% Вывод на экран пустого массива ячеек
celldisp(b);

% Присвоение первому элементу массива ячеек значе-
ния
% вектора B = B1
b(1) = {B};
% Вывод на экран первого элемента массива ячеек
celldisp(b(1));
```

```
% Вычисление остальных векторов Bj начиная со вто-
рого
% и до последнего, индекс которого равен размерно-
сти
% расширенного пространства координат
for j = 2:length(Sys)
  % Вычисление якобиана вектора Bj-1 по вектору v
  jacob_Bjminus1 = jacobian(b(j-1), v);
  % Вычисление первого компонента рекуррентного
соотношения
  part1 = jacob_Bjminus1 * Sys;
  % Вычисление второго компонента рекуррентного
соотношения
  part2 = (jacob_A + jacob_BU) * b(j-1);
  % Вычисление вектора Bj
  b(j) = {part1 - part2};
  celldisp(b(j));
end

% Преобразование массива ячеек b в матрицу D
D = [b{:}];
disp(D);

% Вычисление определителя матрицы D
determinant = det(D);
disp(determinant);

% Решение уравнения det(D) = 0 относительно управ-
ления U
U = solve(determinant == 0,U);
disp(U);
```

Что даёт результат:

– для определителя матрицы $det\ D$:

```
a21*b^3*diff(mu(x2), x2) - 2*U*a22*b^4*x2 -
a21*a22*b^3*x1^2 - 2*a22*b^3*x1*mu(x2) +
2*a22*b^3*x1*x2*diff(mu(x2), x2) -
2*a11*a22*b^3*x1*x2
```

– для управления U, найденного из $det\ D = 0$:

```
-(a21*a22*b^3*x1^2 - a21*b^3*diff(mu(x2), x2)
+ 2*a22*b^3*x1*mu(x2) -
2*a22*b^3*x1*x2*diff(mu(x2), x2) +
2*a11*a22*b^3*x1*x2)/(2*a22*b^4*x2)
```

2.6. ОСОБОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

В общем случае задача перевода управляемой системы из одного состояния в другое по заранее заданным, желаемым, программным траекториям, наряду с задачами стабилизации и следящего регулирования, – это классическая задача теории и практики автоматического управления объектами.

Применительно к электротехническим установкам, состоящим из группы объектов или объекта с многими каналами управляемых технологических параметров, эта задача рассматривается в рамках координирующего (согласованного) управления [14]. Под координацией состояний понимается автоматическое согласование заданных соотношений между управляемыми переменными в установившихся и переходных режимах. Координирующие системы можно разделить на два типа: технологические и траекторные. Примеры технологических задач: синхронное управление электродвигателями, включенными на общую нагрузку, и электрическими генераторами, включенными в общую сеть; регулирование соотношения топливо – воздух в энергоустановках, автоматическое дозирование реагентов в химических технологиях, программное регулирование температуры и давления в автоклавах [68] и др. Примеры траекторных задач координирующего управления: контурное управление в системах числового программного управления станками, пространственное ориентирование звеньев робота, элементов радиотелескопа и т. п.

Применительно к отдельным каналам регулирования технологических параметров процесса или отдельных объектов электротехнической установки задача обеспечения заданного движения охватывает целый класс движений, не зависящий от выбора начальных условий, и может быть сформулирована как задача обеспечения минимального отклонения траекторий объекта от программной (заданной, желаемой) траектории. Так, при контурном управлении станками или роботами могут быть заданы траектории движения приводов по каждой координате согласно параметрической форме описания траекто-

рии. Или могут быть заданы рабочие колебательные или вибрационные режимы в испытательном оборудовании, инструменте, швейной машинке, радаре и др.

В задаче синтеза программного движения для обеспечения наперед заданной в функции времени траектории движения (обычно конечной координаты) под управлением в замкнутой системе (с управлением в функции координат) многие авторы (например, А. А. Колесников [44]) указывают на три группы методов задания и решения задачи:

– инженерный метод формирования переходного процесса с заданием показателей качества (времени первого согласования, колебательности, перерегулирования, времени переходного процесса и других) на основе логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик В. В. Солодовникова [92];

– аналитический, когда при известных в функции времени траекториях объекта, известной структуре и звеньях системы путем обратного решения с выхода на вход находятся координаты и управления в функции времени, а после исключения времени формируется управление в функции координат. К этой группе можно отнести работу Л. М. Бойчука [13], который назвал его методом «структурного синтеза»;

– интегральный метод путем решения оптимальной задачи на минимум ресурсов с подынтегральной функцией, учитывающей ресурсы системы по координатам и управлению (метод аналитического конструирования регуляторов А. А. Фельдбаума [96], А. М. Летова [54], Р. Калмана [36]; функционала обобщенной работы А. А. Красовского [88], упреждающего функционала А. А. Колесникова [44]).

Известные методы синтеза применимы в основном для линейных объектов, причем требуют многократного последовательного применения для получения конечного результата, а метод Л. М. Бойчука [13] к тому же требует знания высших производных управляемого сигнала.

Вид переходного процесса с помощью интегральных показателей иногда пытались решить путем выбора для данного объекта такого интегрального критерия, который позволил бы учесть инженерные показатели качества регулирования. Для этого вводились весовые коэффициенты аддитивных составляющих и изменяющиеся показатели степени для подынтегрального выражения в функционале. В некоторых случаях удавалось получить требуемые для качества системы весовые коэффициенты и показатели степени [29, 102, 104, 105] (см. п. 1.2.4). Но в целом, несмотря на продолжающиеся попытки та-

кого решения [10] в задачах оптимального управления, стабилизации, фильтрации, создать формализованную процедуру соответствия требованиям переходного процесса с помощью интегрального функционала не удалось. В данной работе авторы, идя от аналитического задания вида переходного процесса, вводят в функционал квадрат отклонений заданного программного движения от текущего. Использование квадрата отклонений имеет ясный смысл потому, что большие отклонения штрафуются больше, чем малые. Но не исключено, что лучшие результаты, особенно для нелинейных объектов, могут быть получены и при других показателях степени отклонений и весовых коэффициентах аддитивных составляющих в подынтегральном выражении функционала.

Рассмотрим способ решения задачи синтеза систем программного движения на основе решения оптимальной задачи с интегральным функционалом на минимум отклонения координат от заданного движения под кусочно-постоянным управлением, получаемым из принципа максимума Л. С. Понтрягина [61] в задачах с линейным вхождением управления, и под особым (в смысле принципа максимума) управлением, вычисляемым с помощью аппарата условий общности положения (УОП) для нелинейных объектов [29, 104].

Предлагаемый способ по форме входит в группу интегральных методов, но по содержанию близок к группе аналитических методов, а в целом отражает синергетический подход к синтезу систем управления [45].

В общем виде исходную задачу синтеза программных движений как заданных функций координат от времени можно рассматривать как нестационарную задачу для объекта размерности R_n и интегрального функционала, подынтегральная функция которого зависит от времени:

$$\dot{x} = A(x,t) + B(x,t)U,$$
$$I = \int_0^T p(x,t)dt. \qquad (2\text{-}28)$$

Классиками принципа максимума [61] для нахождения оптимального управления исходная задача решается в расширенном пространстве координат размерности R_{n+2} с дополнительными переменными, учитывающими функционал и явное вхождение времени:

$$\dot{x}_0 = p(x, x_{n+1}), \qquad \dot{x}_{n+1} = 1.$$

Для расширенной системы в R_{n+2} с использованием УОП для нелинейных объектов по рекуррентному соотношению вычисляются векторы B_j $(j = 2, \dots, n+2)$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x, x_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$B_j = \frac{\partial B_{j-1}}{\partial U}\frac{dU}{dt} - \left(\frac{\partial A(x)}{\partial x} + \frac{\partial B(x)U}{\partial x}\right)B_{j-1} + \frac{\partial B_{j-1}}{\partial x}\frac{dx}{dt}. \qquad (2\text{-}29)$$

Образовав матрицу D_{n+2} размером $(n+2)\times(n+2)$ из векторов $(B_1 \quad \dots \quad B_{n+2})$ и вычислив ее определитель $det\, D_{n+2} = 0$, находим уравнения особых траекторий и особых управлений.

Данная процедура введения особых ситуаций в нестационарных задачах исследована в п. 1.2.2. Можно согласиться с тезисом о неединственности оптимального управления из-за тождества $det\, D_{n+2} \equiv 0$, так как ввиду повторяемости процессов для разных начальных условий получаем одинаковые значения функционала. Но выдвигаемый далее тезис о невключении времени как координаты (т. е. невключении $x_{n+1} = t$, $\dot{x}_{n+1} = 1$) является спорным. В работах [29, 104] справедливость последнего тезиса подтверждена практическими примерами с дрейфом экстремальной статической характеристики, учитывающим возмущения на объект. Если же проводить синтез управления, то невключение времени в уравнения движения может вести к потере свойств управления из-за потери зависимости матриц A и B от времени.

И еще одно дополнение к УОП для нестационарных объектов п. 1.2.2. Оно касается конструктивности результатов, точнее, их нетривиальности, связанной с тем, что если взять в функционале точное равенство $\left(x_{\text{зад}}(t) = x(t)\right)$, то можем прийти, например, к ситуации задачи Эйлера – Лагранжа $(x_1 + x_2) \to min$ с ограничением $x_1^2 + x_2^2 = 0$, для нетривиальности результатов в которой ограничения задаются окрестностью $x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon$, так и в рассматриваемой задаче необходимо знать области притяжения $\left|x_{\text{зад}}(t) - x(t)\right| \le \varepsilon$.

Полученное с помощью УОП особое управление дополняется кусочно-постоянным оптимальным управлением, полученным из условий принципа максимума в задаче (2-28). Необходимость и условия стыковки неособых и особых траекторий зависят от граничных условий и точности реализации программного движения.

В качестве примера использования предлагаемого подхода рассмотрим пример, взятый из [13, с. 39], о синтезе автоколебательной системы для одного интегратора

$$\dot{x}_1 = \frac{U}{a_0}$$

с требуемым выходным сигналом

$$x_1 = A\,sin(\omega t).$$

Отметим, что пример показывает одно из широкого спектра использований интегрирующего электропривода [95] как элемента информационно-управляющих систем.

В расширенном пространстве координат $R_{n+2} = R_3$ запишем поставленную задачу:

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = (A\,sin(\omega x_2) - x_1)^2; \\ \dot{x}_1 = \dfrac{U}{a_0}; \\ \dot{x}_2 = 1. \end{cases} \tag{2-30}$$

Выделяя элементы матриц $A(x)$ и $B(x)$ для матричной формы записи последних уравнений в виде $\dot{x} = A(x) + B(x)U$, последовательно вычисляя векторы B_j, $j = 2, 3$ по соотношению (2-29), образуем матрицу

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2}{a_0}A\,sin(\omega x_2) - x_1 & -\dfrac{2U}{a_0^2} + \dfrac{2}{a_0}A\omega\,cos(\omega x_2) \\ \dfrac{1}{a_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проанализируем $det\,D_3$:

$det\,D_3 \equiv 0$, что говорит о неединственности процессов управления из-за их повторяемости в любые начальные моменты времени;

$$det\,D_{2/d_{32}} = \frac{1}{a_0}\left(-\frac{2U}{a_0^2} + \frac{2}{a_0}A\omega\,cos(\omega x_2)\right) = 0,$$

что дает решение $a_0 = \infty$, ведущее к неуправляемости процесса, и решение для особого управления

$$U = a_0 A\omega\, cos(\omega x_2); \tag{2-31}$$

$$det\, D_{2/d_{33}} = -\frac{2}{a_0^2}(A\, sin(\omega x_2) - x_1) = 0, \tag{2-32}$$

из последнего получается уравнение особой траектории.

Совместное решение уравнения особого управления (2-31) и особой траектории (2-32) дает управление автоколебательным процессом объекта в функции выходной координаты

$$U_{oc} = a_0\omega\sqrt{A^2 - x_1^2}, \tag{2-33}$$

что совпадает с полученным в [13].

Далее, если перейти к структуре замкнутой системы управления, то в методе структурного синтеза Бойчука указывается на трудности запуска режима автоколебаний для объектов с одним и двумя интеграторами [13, с. 39, 40, 69–71], что ведет к «застреванию» системы при скорости изменения выходной координаты, близкой к нулю. Там же предлагаются схемные решения для исключения «застревания», которые, может быть, являются новыми техническими решениями, но полученными эвристическим путем.

Если же пойти предлагаемым формализованным путем, используя решение задачи оптимального управления программным автоколебательным движением для рассматриваемой системы (2-30) с одним интегратором в расширенном пространстве R_3, то на основе принципа максимума и УОП получим, что оптимальное управление состоит из участков неособого релейного управления $U_{\text{рел}} = -U_{max}\, sign(x_1)$ и особого непрерывного управления (2-33). Участки неособого релейного управления в моменты $\dot{x}_1 = 0$ позволяют исключить «застревания» системы, причем их ликвидация как бы заложена в предлагаемом методе решения задачи. Реализация предлагаемого алгоритма управления не вызывает затруднений в программно-аппаратном варианте, показанном на рис. 2.46 в программе Simulink пакета MatLab [112].

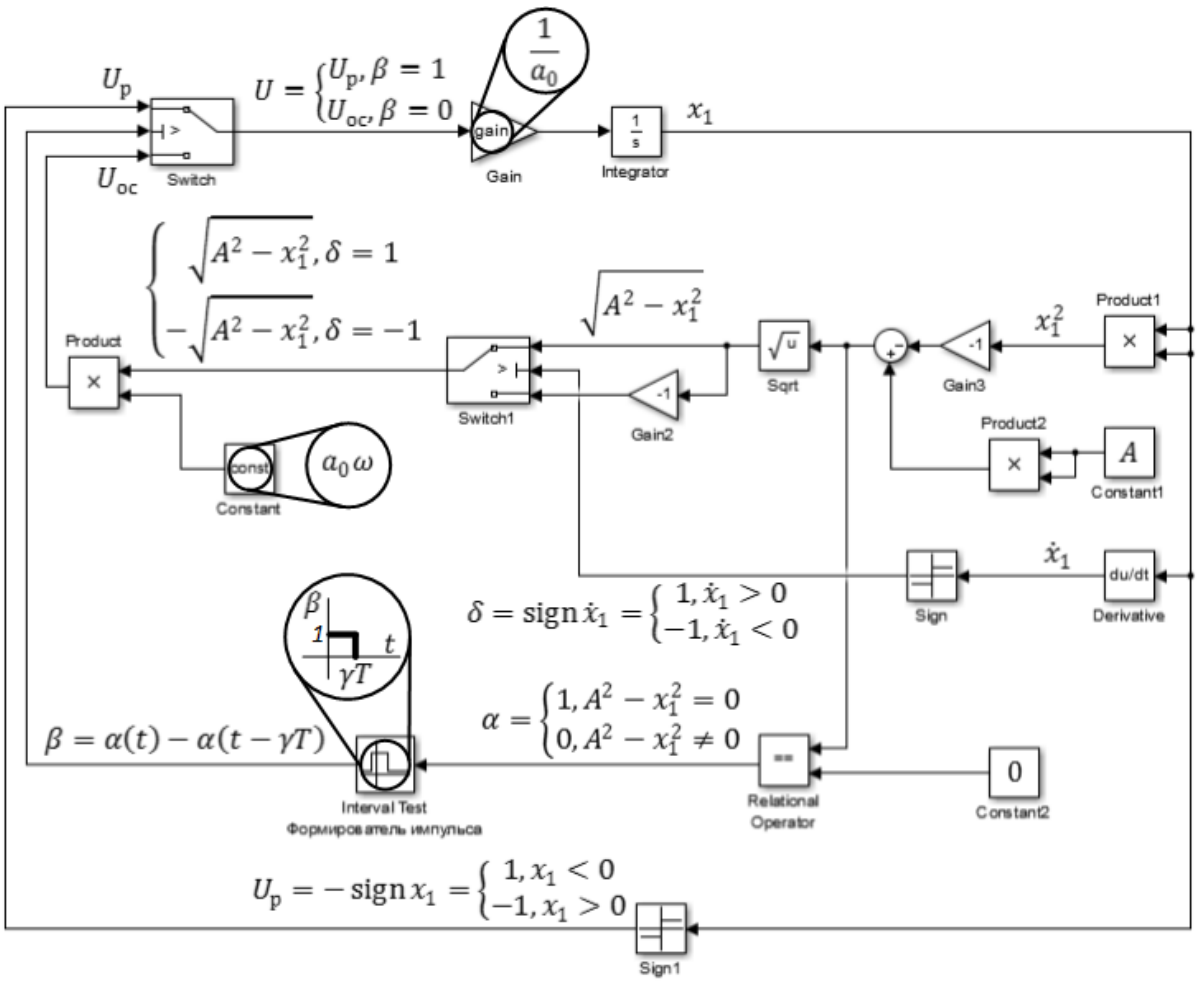

Рис. 2.46. Программно-аппаратная реализация
особого оптимального управления в программе Simulink пакета MatLab

Приведенный простейший пример имел целью показать методику предлагаемого подхода, основанного на исследовании особого оптимального управления к задаче синтеза программного движения, его достоверность, формализованность и эффективность. Что касается автоколебательных режимов, то это в настоящее время вылилось в новую теорию аналитического конструирования агрегированных регуляторов колебаний – АКАРК [46], одним из подходов к ее решению может быть предлагаемый. Можно указать и другие области применения – это задачи модального и прямого адаптивного управлений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты работы теоретически обобщают и развивают методы качественного исследования оптимального, включая особое, управления нелинейными динамическими объектами и заключаются в разработке инженерного методического и математического обеспечения для изучения и проектирования современных систем автоматического управления техническими объектами и технологическими процессами, а именно разработаны:

1. Методика качественного исследования оптимальных управлений в задачах минимизации временных, материальных и энергетических ресурсов для нелинейных стационарных и нестационарных объектов, заключающаяся в комплексном применении принципа максимума, условий определения, вычисления и оптимальности особого управления, качественной теории дифференциальных уравнений, отличающаяся применением функционально-структурного подхода к оптимальным задачам на минимум ресурсов, позволяющая систематизировать и прогнозировать свойства управлений при различных типах нелинейностей, критериев и структур объекта.

2. Аппарат УОП для нелинейных объектов, распространенный на новые классы объектов и задач управления, учитывающий критерий оптимальности, нестационарность задачи и ее нелинейность по управлению, позволяющий вычислить особое управление в явном виде от состояний объекта, определить предельные траектории для скользящего режима, качественно оценить оптимальное управление в части влияния параметров, единственности решения, корректности постановки задачи, вычислить оптимальное управление в задачах с нелинейным управлением через особое.

3. Топологические структуры и бифуркационные свойства оптимальных траекторий в задачах на минимум ресурсов в зависимости от особенностей объекта и критерия оптимальности, определенные с помощью методов нахождения характера особых точек, топологии, бифуркаций, метода малого параметра и метода нахождения хода сепаратрис и состояний равновесия из анализа особого управления.

4. Алгоритмы и структуры управляющих устройств в замкнутых системах, синтез управляющего устройства в которых проводится программными средствами символьных и численных вычислений.

5. Метод построения беспоисковых экстремальных систем, отличающийся нахождением экстремального управления как особого,

позволяющий построить замкнутую систему с регулированием по отклонению с асимптотически устойчивым положением равновесия в произвольной точке статической характеристики.

Практическая ценность результатов работы заключается в разработанных алгоритмах и структурах систем особого оптимального управления, позволяющих объяснять и прогнозировать поведение процесса при различных управлениях и возмущениях, повысить эффективность проектирования систем автоматического управления процессом, обеспечить заданное качество функционирования процесса в установившихся и переходных режимах.

Практические примеры оптимального управления реальными электромеханическими и электротехническими установками – электроприводом постоянного тока, шаговым электроприводом, установкой по электросинтезу озона, интегрирующим электроприводом, а также другие примеры управления реальными установками актуальны, важны и представляют как самостоятельный интерес, так и являются универсальными для построения замкнутых систем управления. Для практических примеров разработаны оптимальные алгоритмы управления и структуры регуляторов для их аппаратной и/или программной реализации.

Дальнейшие исследования в научном плане углубляются применительно к нелинейным детерминированным и стохастическим объектам в задачах ресурсо- и энергосбережения в части использования особого оптимального управления как многократно продифференцированного управления тепловыми процессами и программного движения в технических, экономических, биологических, когнитивных системах, разработки экспертных и прецедентных систем оптимального управления, синтеза оптимальных систем управления на основе искусственных нейронных сетей и нечеткой логики.

Практические результаты развиваются в направлении автоматизации процедуры проектирования оптимальных систем с программным вычислением, исследованием и реализацией алгоритмов управления; представлением, генерированием и оптимизацией вариантов структуры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. – Л. : Энергоатомиздат, 1985. – 240 с.
2. Аладьев В. З., Бойко В. К., Ровба Е. А. Программирование и разработка приложений в Maple. – Гродно; Таллинн, 2007. – 459 с.
3. Александров А. Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М. : Высш. шк., 1989. – 263 с.
4. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, И. Г. Майер. – М. : Наука, 1966. – 568 с.
5. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, И. Г. Майер. – М. : Наука, 1967. – 487 с.
6. Анкудинов Г. И. Синтез структуры сложных объектов. – Л. : Изд. Ленингр. ун-та, 1986. – 260 с.
7. Антомонов Ю. Г. Синтез оптимальных систем. – Киев : Наукова думка, 1972. – 283 с.
8. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М. : Машиностроение, 1968. – 634 с.
9. Афанасьев В. Н. Теория оптимального управления непрерывными динамическими системами. – М. : Издательство физического факультета МГУ, 2011. – 168 с. – URL: https:// miem.hse.ru/ data/2012/04/13/1251558143/text.pdf.
10. Афонин В. В., Мурюмин С. М. Обратные задачи оптимальной стабилизации со скалярным управлением // Вестник Мордовского университета. – 2017. – Т. 27. – № 4. – С. 504–517.
11. Баранов А. В. Разработка методов исследования и критериев общности положения нелинейных систем управления на основе теории дифференциальной геометрии : Автореф. канд. дис. / С.-Петерб. госуд. электротехн. ун-т «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)». – 2009. – URL: https://etu.ru/assets/files/nauka/dissertacii/2009/AVBaranov.pdf.
12. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
13. Бойчук Л. М. Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. – М. : Энергия, 1971. – 112 с.
14. Бойчук Л. М. Синтез координирующих систем автоматического управления. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 160 с.

15. Болтянский В. Г. Метод локальных сечений в теории оптимальных процессов // Дифференциальные уравнения. – 1968. – Т. 4. – № 12. – С. 2166–2183.

16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. – М. : Наука, 1969. – 408 с.

17. Борисенко Р. А. Исследование особых управлений в нелинейных, системах : Автореф. канд. дис. / Ленингр. электротехн. ин-т. – 1972. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01007283949.

18. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. – М. : Мир, 1964. – 596 с.

19. Веремей Е. И. Основные направления применения компьютерных технологий в задачах управления динамическими объектами // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2012. – № 1. – С. 16–21.

20. Условия оптимальности высокого порядка / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. А., Срочко Н. В. Тарасенко // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 5. – С. 5–22; № 6. – С. 5–24; № 7. – С. 5–34.

21. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. – М. : Наука, 1971. – 507 с.

22. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. – М. : Наука, 1973. – 314 с.

23. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные скользящие режимы // ДАН СССР. – 1962. – Т. 143. – № 6. – С. 1243–1245.

24. Гурман В. И., Ни М. К. Вырожденные задачи оптимального управления. I // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 3. – С. 36–50.

25. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М. : Наука, 2005. – 228 с.

26. Душин С. Е. Синтез структурно-сложных систем управления с полиномиальными нелинейностями : Дис. … д-ра техн. наук: 05.13.01. – СПб., 1998. – 454 с. – URL: http:// www.dissercat.com/content/sintez-strukturno-slozhnykh-sistem-upravleniya-s-polinomialnymi-nelineinostyami#ixzz5UwxxmERL.

27. Дьяконов В. П., Круглов В. В. MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1/7 SP2 + Simulink 5/6. Инструменты искусственного интеллекта и биоинформатики. – М. : Солон-Пресс, 2009. – 456 с.

28. Златкин В. И., Гельфанд Я. Е., Шутов В. В. Синтез оптимальной по быстродействию системы управления экстремальным инерционным объектом // Изв. вузов: Приборостроение. – 1976. – № 19. – С. 42–44.

29. Зотов А. В. Анализ и синтез особых оптимальных управлений нелинейными динамическими объектами : Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – СПб., 2014. – 16 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01005555509.

30. Зотов А. В. Экстремальное управление нестационарными нелинейными объектами при горизонтальном дрейфе статической характеристики со смешанным вхождением времени в математическое описание // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. – URL: https://www.science-education.ru/116-12897.

31. Экстремальное управление нестационарными нелинейными объектами при вертикальном дрейфе статической характеристики с мультипликативным вхождением времени в математическое описание / А. В. Зотов, В. С. Хорошавин, С. И. Охапкин, В. С. Грудинин // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. – URL: https://www.science-education.ru/116-12912.

32. Экстремальное управление нестационарными нелинейными объектами при вертикальном дрейфе статической характеристики с аддитивным вхождением времени в математическое описание / А. В. Зотов, В. С. Хорошавин, С. И. Охапкин, В. С. Грудинин // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 2. – URL: http:// www.science-education.ru/116-12911.

33. Ивоботенко Б. А., Козаченко В. Ф. Шаговый привод в робототехнике. – М. : Моск. энергетич. ин-т, 1984. – 206 с.

34. Иоффе А. Д., Исаев В. К. Особые управления и скользящие режимы // Основы теории оптимального управления. – М. : Знание, 1973. – С. 123–139.

35. Казакевич В. В., Родов А. Б. Системы автоматической оптимизации. – М. : Энергия, 1977. – 288 с.

36. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем : Пер. с англ. / Под ред. Я. З. Цыпкина; предисл. Э. Л. Наппельбаума. – Изд. 2-е, стереотип. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 400 с.

37. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М. : Наука, 1976. – 576 с.

38. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. – М. : Мир, 1977. – 576 с.

39. Келли Г. Необходимое условие для особых экстремалей, основанное на второй вариации // Ракетная техника и космонавтика. – 1964. – № 8. – С. 26–29.

40. Кибардин В. В., Ковалева О. А., Язев В. Н. Критерии оптимального управления и lqr-оптимизация в электроприводе // Вестник Красноярского государственного аграрного университета. – 2015. – № 12.

41. Клюев А. С., Колесников А. А. Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. – М. : Энергоатомиздат, 1982. – 238 с.

42. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. – М. : Физматгиз, 1963. – 384 с.

43. Козыбеков А. Ш. Бифуркационные свойства оптимального по быстродействию управления : Автореф. канд. дис. / Ленингр. электротехн. ин-т. – 1974. – URL: https:// search.rsl.ru/ru/record/01006986279.

44. Колесников А. А. Последовательная оптимизация нелинейных агрегированных систем управления. – М. : Энергоатомиздат, 1987. – 160 с.

45. Колесников А. А. Синергетическая теория управления. – М. : Энергоатомиздат, 1994. – 344 с.

46. Колесников А. А. Метод синергетического управления самоорганизующимися нелинейными колебательными системами // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2015. – № 5 (166). – С. 231–242.

47. Копп Р., Мойер Г. Необходимое условие оптимальности особых экстремалей // Ракетная техника и космонавтика. – 1965. – Т. 3. – Вып. 8. – С. 81–94.

48. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. : Наука, 1970. – 832 с.

49. Кочетков В. И. Синтез нелинейных систем стабилизации, оптимальных по быстродействию и по расходу энергии // Нелинейная оптимизация систем автоматического управления. – М. : Машиностроение, 1970. – С. 267–294.

50. Красовский А. А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М. : Наука, 1973. – 558 с.

51. Красовский Н. Н. Теория управления движением. – М. : Наука, 1968. – 475 с.

52. Кротов В. Ф., Гурман В. И. Методы и задачи оптимального управления. – М. : Наука, 1973. – 446 с.

53. Кузнецова О. А. Многокритериальная концепция энергоэффективных режимов электроприводов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. – 2011. – № 6-1.

54. Летов А. М. Динамика полета и управление. – М. : Наука, 1969. – 319 с.

55. Летов А. М. Некоторые нерешённые задачи теории автоматического управления. – М. : Дифференциальные уравнения, 1970. – Т. 6. – № 4.

56. Ли Э. Б., Маркус Л. Оптимальное управление для нелинейных процессов // Кибернет. сб. – М. : Мир, 1966. – № 2. – С. 86–117.

57. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М. : Наука, 1972. – 574 с.

58. Лобанов С. М. Метод оптимального управления нелинейными системами по квадратичному критерию // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2013. – Т. 9. – № 1.

59. Ловчаков В. И., Сухонин Б. В., Сурков В. В. Оптимальное управление электротехническими объектами : Учеб. пособие / Тул. гос. ун-т. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. – 149 с.

60. Манзон Б. М. Maple V Power Edition. – М. : Филинъ, 1998. – 253 с.

61. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 384 с.

62. Мерриэм К. У. Теория оптимизации и расчет систем с обратной связью. – М. : Мир, 1967. – 415 с.

63. Метьюз Д., Финк К. Численные методы. Использование MATLAB. – М. : Вильямс, 2001. – 720 с.

64. Михайлов Ф. А. Теория и методы исследования нестационарных линейных систем. – М. : Наука, 1986. – 320 с.

65. Мищенко В. А. Теория, способы и системы векторного и оптимального векторного управления электроприводами переменного тока. – М. : Издательство «Информэлектро», 2002. – 168 с.

66. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М. : Наука, 1975. – 247 с.

67. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем. – М. : Наука, 1975. – 286 с.

68. Анализ управляемости и устойчивости приближенной модели теплопереноса в автоклаве / С. А. Мокрушин, В. С. Хорошавин, С. И. Охапкин, А. В. Зотов, В. С. Грудинин // Вестник Мордовского университета. – 2018. – Т. 28. – № 3. – С. 416–428.

69. Норенков И. П. Введение в автоматизированное проектирование технических устройств и систем. – М. : Высш. шк., 1980. – 311 с.

70. Олейников В. А., Зотов Н. С., Пришвин М. М. Основы оптимального и экстремального управления. – М. : Высш. шк., 1969. – 296 с.

71. Олейников В. А., Смирнов Г. М. Оптимальное по быстродействию управление нелинейными объектами // Автоматика и телемеханика. – 1970. – № 12. – С. 167–170.

72. Олейников В. А., Борисенко Р. А. Асимптотические свойства фазовых траекторий и особые управления в оптимальных быстродействиях // Вопросы теории систем автоматич. управления. – Л. : Ленингр. гос. ун-т, 1974.

73. Олейников В. А. Синтез оптимальных по быстродействию управлений для нелинейных объектов : Автореф. докт. дис. / Ленингр. электротехн. ин-т. – 1974. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01007167491.

74. Олейников В. А., Безвиконный А. А., Григорян В. Г. Оптимальные системы автоматического управления. – Л. : Ленингр. электротехн. ин-т, 1978. – 103 с.

75. Олейников В. А. Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности. – Л. : Недра, 1982. – 216 с.

76. Павлов А. А. Синтез релейных систем, оптимальных по быстродействию. – М. : Наука, 1966. – 392 с.

77. Параев Ю. И. Об особом управлении в оптимальных процессах, линейных относительно управляющих воздействий // Автоматика и телемеханика. – 1962. – Т. 23. – № 9. – С. 1202–1209.

78. Петров Ю. П. Оптимальное управление электроприводом с учетом ограничений по нагреву. – Л. : Энергия, 1971. – 144 с.

79. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. – Л. : Энергия, 1977. – 280 с.

80. Поляков В. Н., Шрейнер Р. Т. Экстремальное управление электрическими двигателями : Монография / Под общ. ред. Р. Т. Шрейнера. – Екатеринбург : Изд-во УГТУ-УПИ, 2006. – 420 с.

81. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М. : Наука, 1969. – 384 с.

82. Растригин Л. А. Системы экстремального управления. – М. : Наука, 1974. – 630 с.

83. Розов Н. Х. Постановка задачи оптимального управления // Основы теории оптимального управления. – М. : Знание, 1973. – С. 6–27.

84. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. – 1959. – Т. 20. – № 10. – С. 1320–1334; № 11. – С. 1441 –1458; № 12. – С. 1561–1578.

85. Савченко В. С. Об одном способе численного решения задач с особыми оптимальными управлениями // Изв. АН СССР: Техн. кибернетика. – 1989. – № 2. – С. 70–74.

86. Сейдж Э. П., Уайт Ч. С. Оптимальное управление системами. М. : Радио и связь, 1982. – 398 с.

87. Смирнов Г. М. Условия общности положения в нелинейных системах // Известия Сибирского отделения АН СССР. Серия технических наук. – 1972. – № 3. – С. 96–103.

88. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А. А. Красовского. – М. : Наука, 1987. – 712 с.

89. Стариков А. И. Алгоритмы и структуры оптимального особого векторного управления нелинейными динамическими объектами: Автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01. – Киров, 1999. – 18 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01000238600

90. Сурков В. В., Сухинин Б. В. Аналитическое конструирование регуляторов, оптимальных по точности и быстродействию Тула. – 2005. – URL: http://eeo.tula.ru/Pubs/monsuk2005.pdf

91. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применения. – М. : Машиностроение, 1972. – 544 с.

92. Теория автоматического управления / В. Б. Яковлев, С. Е. Душин, Н. С. Зотов, Д.Х. Имаев. – М. : Высш. шк., 2009. – 568 с.

93. Тетельбаум И. М., Шнейдер Ю. Р. 400 схем для АВМ. – М. : Энергия, 1978. – 283 с.

94. Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Математический сборник. – 1952. – Т. 31. – № 3. – С. 575–586.

95. Фабрикант Е. А. Интегрирующий привод. – Л. : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1980. – 141 с.

96. Фельдбаум А. А. Основы теории оптимальных автоматических систем. – М. : Наука, 1966. – 623 с.

97. Филимонов А. Б., Филимонов Н. Б. О проблематике синтеза координирующих систем автоматического управления // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2012. – № 3 (128). – С. 172–180.

98. Филиппов Ю. В., Вобликова В. А., Пантелеев В. И. Электросинтез озона. – М. : Моск. гос. ун-т, 1987. – 273 с.

99. Формальский А. М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. – М. : Наука, 1974. – 368 с.

100. Хорошавин В. С. О параметрической оптимизации в задачах с ограничением ресурсов // Изв.ЛЭТИ : Сб. науч. тр. – Л., 1977. – Вып. 222. – С. 44–50.

101. Хорошавин В. С. Об оптимальном управлении в задачах с ограниченными ресурсами управления // Вопросы теории систем автоматического управления. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – С. 10–14.

102. Хорошавин В. С. Оптимальное с ограничением ресурсов управление нелинейными объектами : Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.02. – Л., 1978. – 200 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/ record/ 01007803566.

103. Хорошавин В. С., Протасов А. П. Оптимальное управление электротехническими установками : Учеб. пособие – Киров : Кировский политехн. ин-т, 1992. – 95 с.

104. Хорошавин В. С. Прикладные методы качественного исследования особых управлений и структур нелинейных оптимальных систем : Дис. … д-ра техн. наук: 05.13.01. – Киров, 1993. – 402 с. – URL: https://search.rsl.ru/ru/record/01000201432.

105. Хорошавин В. С., Терехов Я. Ю. Получение программной траектории при оптимизации нелинейных динамических объектов // Проблемы обработки информации: Вестник ВНЦ ВВО АТН РФ. – Вып. 1/98. – С. 104–110.

106. Хорошавин В. С., Стариков А. И. Особое управление асинхронным электродвигателем с переменным критерием оптимальности // Высокие технологии в радиоэлектронике, информ. и связи: Вестник ВНЦ ВВО АТН РФ. – Вып. 1/01. – С. 122–128.

107. Хорошавин В. С., Шестаков А. В. Исследование оптимального управления вентильным сварочным генератором с использованием качественных и точных математических моделей // Проблемы обработки информации: Вестник ВНЦ ВВО АТН РФ. – Вып. 1(3)/2002. – С. 72–77.

108. Хорошавин В. С., Зотов А. В., Ишутинов Д. В. Анализ эффективности систем управления нелинейными объектами в переходных процессах по критерию минимума ресурсов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2014. – № 2. – С. 23–28.

109. Хорошавин В. С. Синтез программного движения на основе оптимального, включая особое, управления // Труды IX междуна-

родной (XX Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2016. – 2016. – С. 226–228.

110. Цирлин А. М. Оптимальное управление технологическими процессами. – М. : Энергоатомиздат, 1986. – 400 с.

111. Чаки Ф. Современная теория управления. – М. : Мир, 1975. – 424 с.

112. Черных И. В. Система численно-математического моделирования MatLab. Система моделирования динамических систем Simulink. – URL: https://bourabai.ru/cm/simulink.htm.

113. Чистов В. П., Бондаренко В. И., Святославский В. А. Оптимальное управление электрическими приводами постоянного тока. – М. : Энергия, 1968. – 232 с.

114. Чупрун Б. Е. Задачи с ограничением на изменение управления // Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 3. – С. 24–37; 1976. – № 12. – С. 20–31.

115. Шестаков А. В. Модели, алгоритмы и структуры систем оптимального управления синхронными электрическими машинами : Дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01, 05.09.03. – Киров, 2001. – 173 с. URL: https://www.dslib.net/sys-analiz/modeli-algoritmy-i-struktury-sistem-optimalnogo-upravlenija-sinhronnymi.html.

116. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. – М. ; Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2004. – 416 с.

117. Эдвардс Ч. Г., Пенни Д. Э. Дифференциальные уравнения и проблема собственных значений: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е изд. / Ч. Г. Эдвардс. – М. : Вильямс, 2007. – 1104 с.

118. Элуашвили М. Г. Методы вычисления особых управлений // Автоматика и телемеханика. – 1971. – № 11. – С. 26–35; 1972. – № 1. – С. 4–15.

119. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М. : Наука; 1965. – 519 с.

120. Энциклопедия кибернетики. Т. 1, 2 / Под ред. В. М. Глушкова. – Киев : Укр. сов. энцикл., 1975. – 607 с., 620 с.

121. Athans M., Canon M. D. Fuel-optimal singular control of a nonlinear second order system (Fuel optimal singular control of nonlinear second order system with cost being linear combination of consumed fuel and elapsed time) // Preprint 1964, Joint Autom.Contr.Conf. – June, 1964. – P. 245–255.

122. Clements D. J., Anderson B. D. O. Singular optimal control: the linear-quadratic problem. – Springer Verlag, 1978. – Т. 5.

123. Faibusovich L. E. Explicitly solvable non-linear optimal control problems // International Journal of Control. – 1988. – Т. 48. – № 6. – P. 2507–2526.

124. Johnson C. D. Singular solutions in optimal control problems // Advances in Control Systems. – 1965. – Т. 2. – С. 209–267.

125. Johnson C., Gibson J. Singular solutions in problems of optimal control // IEEE Trans. Automatic Control. – 1963. – V. AC-8. – № 1. – P. 4–15.

126. Lehn W. On singular fuel-optimal control of nonlinear systems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1970. – Т. 15. – № 1. – С. 115–116.

127. Mathworks Matlab R2017b. – URL: https://texdizain.net/programmy/97-mathworks-matlab.html.

128. Moore I. B. A note on feedback compensators in optimal linear systems // IEEE Trans Automat Control. – V. AC-15, 1970, 4.

129. Pearson I. B. Compensators design for dynamic optimization / I. B. Pearson // Int. I Control. – 1969. – V. 9, 4.

130. Wolfram|alpha. – URL: https://www.wolframalpha.com/

131. Wonham W. M. Linear multivariable control // Optimal control theory and its applications. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1974. – P. 392–424.

132. Wonham W. M. Linear Multivariable Control: A Geometric Approach. – Springer Science & Business Media, 2012. – Т. 10.

133. Wonham W. M., Johnson C. D. Optimal bang-bang control with quadratic performance index // Journal of Basic Engineering. – 1964. – Т. 86. – № 1. – P. 107–115.

134. Zhang Y. L., Gao J. C., Zhou C. H. Optimal regulation of nonlinear systems // International Journal of Control. – 1989. – Т. 50. – № 3. – P. 993–1000.

135. А.с. № 964938. Электропривод / Г. И. Болтунов, В. Н. Дроздов, А. Е. Козярук, И. В. Мирошник. – Опубл. 07.10.82. Бюл. № 37. – 4 с.

136. А.с. № 1394385. Электропривод постоянного тока / В. С. Хорошавин, Н. И. Присмотров. – Опубл. 07.05.88. Бюл. № 17. – 6 с.

137. А.с. № 1386962. Устройство для программного управления процессом обработки изделий микроэлектроники / В. С. Хорошавин, В. С. Грудинин, Н. И. Присмотров, А. А. Карманов. – Опубл. 07.04.88. Бюл. № 13. – 12 с.

138. А.с.№ 1389498. Устройство для программного позиционирования / В. С. Хорошавин, В. С. Грудинин, А. А. Карманов, Л. А. Опарина. – 18 с.

139. А.с. № 1458960. Электропривод постоянного тока / В. С. Хорошавин, Н. И. Присмотров, О. А. Бабинцева. – Опубл. 15.02.89. Бюл. № 6. – 10 с.

140. А.с. № 1603341. Устройство для определения экстремума / В. С. Хорошавин, Н. И. Присмотров, В. С. Грудинин, С. М. Фокин. – Опубл. 30.10.90. Бюл. № 40. – 5 с.

141. А.с. № 1697239. Электропривод постоянного тока / В. С. Хорошавин, С. С. Ветошев, Э. В. Москвин. – Опубл. 07.12.91. Бюл. № 45. – 6 с.

142. Патент № 1795861. Способ программного управления шаговым перемещением посредством ШЭД и устройство для его реализации / В. С. Хорошавин, В. И. Лалетин, В. С. Грудинин. – Опубл. 07.10.94. Бюл. № 37. – 6 с.

143. Патент № 2092964. Способ управления шаговым электроприводом и устройство для его осуществления / В. С. Хорошавин, В. И. Лалетин, В. С. Грудинин. – Опубл.10.10.97. Бюл. № 28. – 10 с.

144. Патент № 95110041. Способ беспоискового экстремального управления и устройство для его реализации / В. С. Хорошавин, Э. В. Москвин. – Опубл. 10.06.1997. ФИПС. – 6 с.

145. Программа вычисления особого оптимального управления для инерционных объектов произвольного порядка в системе компьютерной алгебры MAPLE / А. В. Зотов, В. С. Хорошавин. – Свидетельство гос. регистрации программы для ЭВМ № 2012616795 от 30.07.2012.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В современной теории управления часто используется представление модели системы управления не в передаточных функциях, когда используются частотные методы исследования, а представление уравнений движения в векторно-матричной форме, когда анализ и синтез системы ведётся во временной области, что значительно облегчает физическую интерпретацию полученных решений, особенно при исследовании управляемости и наблюдаемости систем [8, 36, 68]. Использование векторно-матричного представления может облегчить решение и одной из так называемых «нерешённых задач теории автоматического управления» – применение многократно продифференцированного управления [55].

Зная трудности перехода из частотной области исследования систем управления во временную, полезнее в методическом, может быть, точнее в плане формализации переход из частотной области (передаточных функций) или временной области (дифференциального уравнения n-го порядка) во временную область с векторно-матричной формой записи в виде системы n уравнений первого порядка в общем подходе объединить известные метод понижения порядка старшей производной по координатам для решения дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах [42, 93], используемый для дифференциальных уравнений без дифференциальных составляющих управления, и метод включения прямой связи по управлению, учитывающий дифференциальные составляющие управления [8], и расписать формализованную процедуру его использования.

Суть предлагаемого подхода заключается в том, что при известном дифференциальном уравнении n-го порядка или передаточной функции системы независимо от наличия дифференциальных составляющих управления в уравнении или нулей в передаточной функции выходной сигнал системы определяется как сумма промежуточных координат (по снижению порядка для производных координат) и дополнительных сигналов по управлению (как прямых сигналов по управлению, учитывающих дифференциальные составляющие управления). Структура предлагаемого представления дифференциального уравнения показана на рис. П. 1.

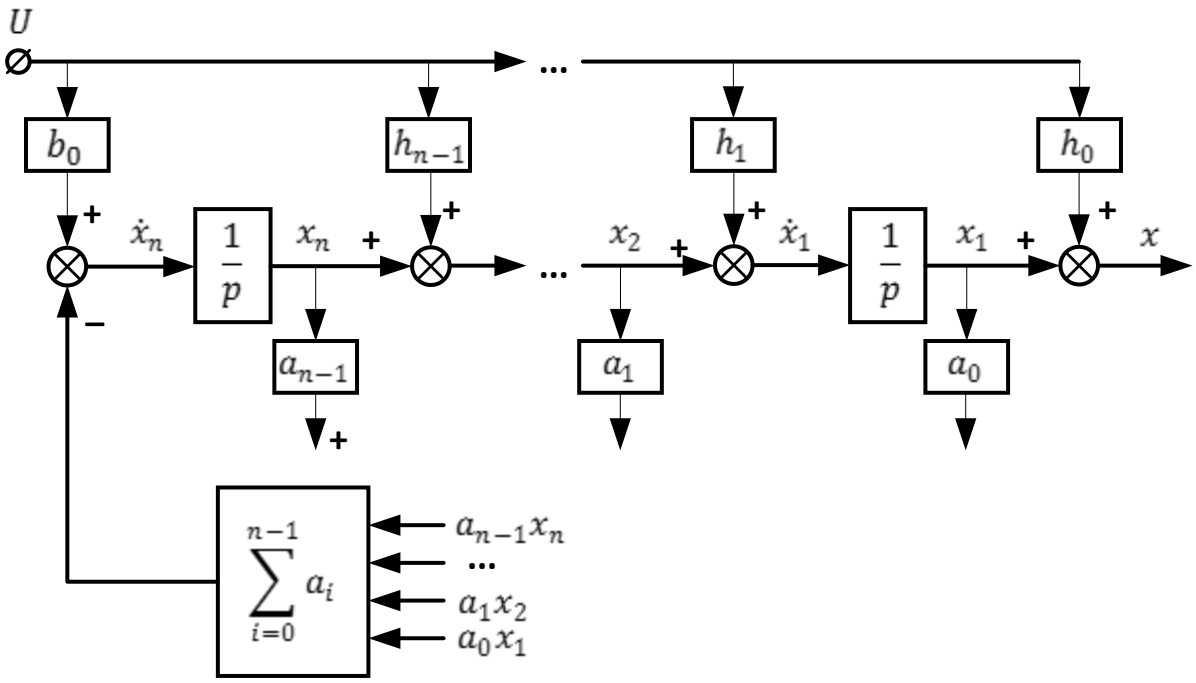

Рис. П. 1. Структура представления дифференциального уравнения

Если задано дифференциальное уравнение n-го порядка с выходом x и управлением U

$$\begin{gathered}(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0)x = \\ = (b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0)U\end{gathered} \qquad (\text{П-1})$$

(отметим, что коэффициент a_n при старшей производной $x^{(n)} = 1$), то для представления этого уравнения в виде системы n уравнений первого порядка по методу понижения порядка координат с прямой связью по управлению с параметрами h вводится система уравнений

$$\begin{gathered}x = x_1 + h_0 U, \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U}, \\ x_1 = x - h_0 U, \\ x_2 = \dot{x} - h_0 \dot{U} - h_1 U = \dot{x}_1 - h_1 U, \\ \dot{x}_1 = x_2 + h_1 U, \\ x_3 = \ddot{x} - h_0 \ddot{U} - h_1 \dot{U} - h_2 U = \dot{x}_2 - h_2 U, \\ \dot{x}_2 = x_3 + h_2 U, \\ \cdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + h_{n-1} U.\end{gathered} \qquad (\text{П-2})$$

Здесь важный момент для связи промежуточных координат x_i, $i = \overline{1, n}$ с исходным уравнением (П-1), для чего в уравнении для $\dot{x}_n$

$$\dot{x}_n = x^{(n)} - h_0 U^{(n)} - h_1 U^{(n-1)} - \cdots - h_{n-1}\dot{U} \qquad \text{(П-3)}$$

в качестве первого слагаемого $x^{(n)}$ используется исходное уравнение (П-1), разрешённое относительно старшей производной по координате x

$$\begin{gathered} x^{(n)} = (-a_{n-1}p^{n-1} - \cdots - a_1 p - a_0)x + \\ +(b_n p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \cdots + b_1 p + b_0)U. \end{gathered} \qquad \text{(П-4)}$$

При подстановке (П-4) в (П-3) учитываем введенные для $x^{(i)}$, $i = \overline{0, n-1}$, условия (П-2). В результате получаем уравнение, назовём его (П-5), для $\dot{x}_n$, зависящее от координат x_1, x_2, …, x_n, управлений U, $\dot{U}$, …, $U^{(n)}$, коэффициентов h h_0, h_1, …, h_{n-1} и параметров исходной системы a и b, в котором на следующем шаге избавляемся от старших производных по U в $\dot{x}_n$, при этом получим неизвестные коэффициенты h h_0, h_1, …, h_{n-1} в зависимости от параметров уравнения (П-1).

При известных h h_0, h_1, …, h_{n-1} с учётом системы (П-2) и уравнения (П-5) получаем исходную систему n уравнений первого порядка для уравнения (П-1) в векторно-матричной форме записи

$$\dot{x} = Ax + BU.$$

<u>Пример 1.</u> Рассмотрим простой пример без нулей в передаточной функции

$$T_2\ddot{x} + T_1\dot{x} + T_0 x = kU.$$

Шаги:

1) Преобразуем исходное уравнение, чтобы коэффициент $a_n = 1$

$$\ddot{x} + \frac{T_1}{T_2}\dot{x} + \frac{T_0}{T_2}x = \frac{k}{T_2}U.$$

2) Введём переменные

$$\begin{gathered} x = x_1 + h_0 U, \\ \dot{x} = \dot{x}_1 + h_0\dot{U}, \\ x_1 = x - h_0 U, \\ x_2 = \dot{x} - h_0\dot{U} - h_1 U, \\ \dot{x}_1 = x_2 + h_1 U. \end{gathered}$$

3) Составим уравнение для $\dot{x}_2$ с учётом исходного уравнения и введённой системы

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} - h_0\ddot{U} - h_1\dot{U} = \frac{k}{T_2}U - \frac{T_1}{T_2}\dot{x} - \frac{T_0}{T_2}x - h_0\ddot{U} - h_1\dot{U}.$$

4) Чтобы $\dot{x}_2$ не зависел от всех производных по U, положим

$$h_0 = 0, \qquad h_1 = 0.$$

5) Тогда из введённых условий получим

$$x = x_1,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 = x_2,$$
$$x_2 = \frac{k}{T_2}U - \frac{T_1}{T_2}x_2 - \frac{T_0}{T_2}x_1,$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{x} = Ax + BU,$$
$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{T_0}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{pmatrix}U.$$

Этот простой пример можно было решить и без применения прямого канала для производных по управлению, но он показывает достоверность и формализованность предлагаемой процедуры.

<u>Пример 2.</u> Рассмотрим пример с нулями в передаточной функции

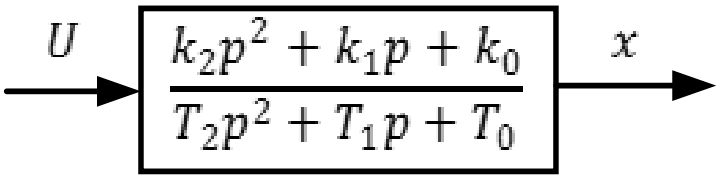

Рис. П. 2. Передаточная функция с нулями в числителе

Шаги:

1) Приводим к виду с $a_n = 1$

$$\ddot{x} + \frac{T_1}{T_2}\dot{x} + \frac{T_0}{T_2}x = \frac{k_2}{T_2}\ddot{U} + \frac{k_1}{T_2}\dot{U} + \frac{k_0}{T_2}U.$$

2) Введём переменные

$$x = x_1 + h_0 U,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U},$$
$$x_1 = x - h_0 U,$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x} - h_0 \dot{U},$$
$$x_2 = \dot{x} - h_0 \dot{U} - h_1 U,$$
$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 U.$$

3) Для старшей производной с учётом уравнения движения исходной системы запишем

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} - h_0 \ddot{U} - h_1 \dot{U} =$$
$$= -\frac{T_1}{T_2}\dot{x} - \frac{T_0}{T_2}x + \frac{k_2}{T_2}\ddot{U} + \frac{k_1}{T_2}\dot{U} + \frac{k_0}{T_2}U - h_0\ddot{U} - h_1 U.$$

С учётом уравнений связи

$$x = x_1 + h_0 U,$$
$$\dot{x} = \dot{x}_1 + h_0 \dot{U}$$

после подстановки в последнее уравнение для $\dot{x}_2$ получим

$$\dot{x}_2 = -\frac{T_1}{T_2}x_2 - \frac{T_0}{T_2}x_1 + \ddot{U}\left(\frac{k_2}{T_2} - h_0\right) +$$
$$+\dot{U}\left(\frac{k_1}{T_2} - h_0\frac{T_1}{T_2} - h_1\right) + U\left(\frac{k_0}{T_2} - h_1\frac{T_1}{T_2}\right).$$

4) Избавимся от старших производных U в $\dot{x}_2$

$$h_0 = \frac{k_2}{T_2},$$
$$h_1 = \frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2 T_1}{T_2^2}.$$

5) Для полученных h_0, h_1 найдём для первого звена

$$\dot{x}_1 = x_2 + h_1 U = x_2 + \left(\frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2 T_1}{T_2^2}\right)U,$$

для второго звена

$$\dot{x}_2 = -\frac{T_1}{T_2}x_2 - \frac{T_0}{T_2}x_1 + U\left(\frac{k_0}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2T_1}{T_2^2}\right)\right),$$

что в векторно-матричной форме записи

$$\dot{x} = Ax + BU$$

учитывает

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{T_0}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2T_1}{T_2^2} \\ \frac{k_0}{T_2} - \frac{T_1}{T_2}\left(\frac{k_1}{T_2} - \frac{k_2T_1}{T_2^2}\right) \end{pmatrix}.$$

<u>Пример 3.</u> Формализуем процедуру представления передаточной функции с нулями в пространство состояний на примере объекта

$$\dot{x} + T_0x = k_0U + k_1\dot{U} \qquad \text{(П-5)}$$

со структурой, представленной на рис. П. 3.

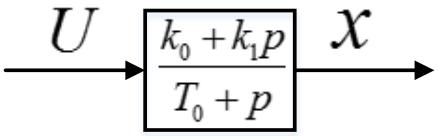

Рис. П. 3. Структура исходного объекта (П-5) с нулями в числителе

В уравнении (П-5) объекта (см. рис. П. 3) принимаем коэффициент при старшей производной выходе равным 1.

<u>1-й шаг. Вводим</u> дополнительные переменные

$$x = x_1 + h_0U,$$
$$\dot{x}_1 = \dot{x} - h_0\dot{U} = x_2 + h_1U,$$

и т. д. до

$$\dot{x}_{n-1} = x_n + h_{n-1}U.$$

<u>2-й шаг. Подставляем</u> введенные дополнительные переменные в исходное уравнение

$$\dot{x}_1 + h_0\dot{U} = k_0U + k_1\dot{U} - T_0(x_1 + h_0U).$$

<u>3-й шаг. Избавляемся</u> от производных по U в последнем уравнении

$$\dot{x}_1 = k_0U + k_1\left(1 - \frac{h_0}{k_1}\right)\dot{U} - T_0x_1 - T_0h_0U,$$

из $\left(1 - \frac{h_0}{k_1}\right) = 0$ получаем $h_0 = k_1$. Тогда система уравнений объекта и его структура в пространстве состояний примут вид (рис. П. 4)

$$\dot{x}_1 = U(k_0 - k_1T_0) - T_0x_1,$$
$$x = x_1 + k_1U.$$

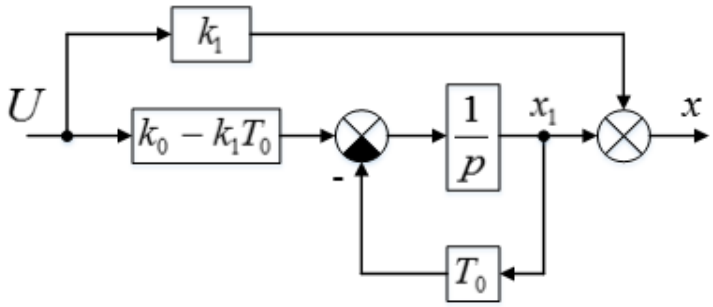

Рис. П. 4. Структура исходного объекта (П-5) без нулей в числителе

Из приведённого примера видна сложность метода понижения порядка старшей производной выхода и введения добавок по управлению, учитывающих производные по управлению, хотя новая структура (см. рис. П. 4) позволяет более детально оценить влияние параметров в исходной структуре (см. рис. П. 3).

Предлагаемый общий подход использует и закрепляет фундаментальные для исследования динамики систем управления понятия об уменьшении порядка производных координат и учёта производных по управлению, что важно для анализа и синтеза конкретных систем управления вместо отыскания формул перехода или программ для машинного решения задачи, таких как пакет Matlab компании MathWorks [127] или системы Wolfram Alpha [130].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2
КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Прежде чем приступить к численному расчету оптимальных траекторий с учетом особого управления, желательно провести качественный анализ траекторий объекта под действием особого управления, для чего удобно использовать методы качественной теории дифференциальных уравнений [12], позволяющие определить характер состояний равновесия в нелинейных системах.

В отличие от линейных систем, для которых положением равновесия может быть лишь начало координат $(0, 0)$, для нелинейных систем говорят не об устойчивости вообще, а об устойчивости положения равновесия. Рассмотрим метод определения характера состояния равновесия для одного класса состояний равновесия.

Пусть точка с координатами (x_{10}, x_{20}) – состояние равновесия (особая точка) системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2), \end{cases}$$

в которой $P(x_{10}, x_{20}) = Q(x_{10}, x_{20}) = 0$.

Введем обозначения

$$\Delta(x_{10}, x_{20}) = \begin{vmatrix} P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & P'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \\ Q'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) & Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}) \end{vmatrix},$$
$$\sigma(x_{10}, x_{20}) = P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) + Q'_{x_2}(x_{10}, x_{20}),$$

где производная, например, $P'_{x_1}(x_{10}, x_{20}) = \left.\frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial x_1}\right|_{x_{10}, x_{20}}$.

Состояние равновесия, для которого $\Delta(x_{10}, x_{20}) \neq 0$, называется простым.

При введении параметров Δ и σ производится линеаризация нелинейной системы в окрестности точки (x_{10}, x_{20}). Характеристическое уравнение для линеаризованной в окрестности точки (x_{10}, x_{20}) системы через параметр Δ и σ запишется в виде

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

а характеристические корни $\lambda_{1,2}$ равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} - \Delta} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\,\Delta}}{2}.$$

В зависимости от значений $\Delta, \sigma, \lambda_{1,2}$ возможны следующие случаи:

1) корни характеристического уравнения действительны и одинаковых знаков. Состояние равновесия называется устойчивым узлом, если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, и неустойчивым узлом, если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$;

2) корни характеристического уравнения действительны и различных знаков, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$. Состояние равновесия неустойчиво и называется седлом;

3) $\sigma^2 - 4\,\Delta < 0$, корни характеристического уравнения комплексные сопряженные. Состояние равновесия является устойчивым фокусом, если $\frac{\sigma}{2} < 0$, и неустойчивым, если $\frac{\sigma}{2} > 0$;

4) случай $\frac{\sigma}{2} = 0$ требует дополнительного рассмотрения. Если в линейных системах однозначно определяется центр, то для нелинейных систем при чисто мнимых корнях вопрос о характере особой точки требует дополнительного численного исследования.

Состояния равновесия типа 1), 2), 3) называются грубыми состояниями равновесия, так как все траектории, проходящие через достаточно малую окрестность состояния равновесия, имеют одинаковую топологическую структуру.

Для определения направлений, по которым траектории стремятся к положению равновесия, вычисляются коэффициенты направлений по формулам

$$æ_1 = \frac{\lambda_1 - P'_{x_1}(x_{10}, x_{20})}{P'_{x_2}(x_{10}, x_{20})}, \qquad æ_2 = \frac{\lambda_2 - P'_{x_1}(x_{10}, x_{20})}{P'_{x_2}(x_{10}, x_{20})}.$$

Очевидно, что $æ_1$ и $æ_2$ действительны только тогда, когда действительны λ_1 и λ_2.

<u>Пример.</u> Пусть уравнения системы под особым управлением имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0{,}5 - x_1 = P(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1^2 - x_2 = Q(x_1, x_2). \end{cases}$$

Особой точкой этой системы является точка $(0{,}5, 0{,}25)$, так как $P(0{,}5, 0{,}25) = Q(0{,}5, 0{,}25) = 0$. Для определения характера особой точки вычисляются $\Delta = 1$, т. е. имеем простую особую точку, и $\sigma = -2$. Характеристические корни определяются из уравнения $\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0$, что дает $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Коэффициенты направлений неопределенны: $æ_1 = {}^0/_0, æ_2 = {}^0/_0$, поэтому можно сделать вывод, что простая особая точка $(0{,}5, 0{,}25)$ является устойчивым дикритическим узлом. Траектории системы под действием особого управления показаны на рис. П. 5.

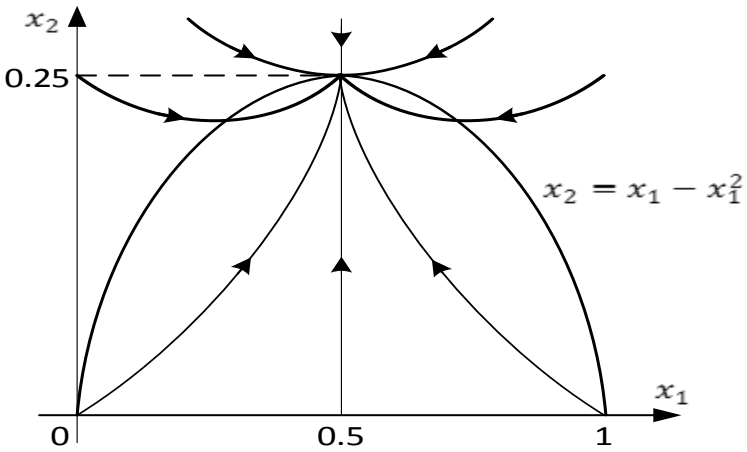

Рис. П. 5. Траектории системы под действием особого управления

Научное издание

Хорошавин Валерий Степанович

Зотов Александр Викторович

ОСОБОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ

Редактор *Ю. Н. Болдырева*
Технический редактор *Л. А. Кислицына*

Подписано в печать 29.04.2019 г.
Выход в свет 20.05.2019 г.
Формат 60×84/16.
Печать цифровая.
Бумага для офисной техники.
Усл. печ. л. 13,0.
Тираж 500 экз.
Заказ № 5768

Научное издательство Вятского государственного университета
610000, г. Киров, ул. Московская, 36
www.vestnik43.ru, www.vyatsu.ru
Тел. 20-89-64

Отпечатано в центре полиграфических услуг
Вятского государственного университета,
610000, г. Киров, ул. Московская, 36